

## LINEÁRNÍ KOMBINACE (LK)

Vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ ; koeficienty  $r_1, \dots, r_s$

$$\mathbf{v} = r_1 \mathbf{v}_1 + \dots + r_s \mathbf{v}_s = \sum r_k \mathbf{v}_k \quad (k=1 \dots s)$$

nulová LK:  $\mathbf{v} = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}$ , přičemž pokud:

$r_1 = \dots = r_s = 0$  ...triviální nulová LK

$\exists i: r_i \neq 0$  ...netriviální nulová LK

## LK – příklad:

$$s=2; \quad \mathbf{v}_1=(4,0,-20), \quad \mathbf{v}_2=(-1,0,5)$$

- triviální nulová LK (jediná):

$$\begin{aligned} r_1=r_2=0 \dots r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 &= 0(4,0,-20) + 0(-1,0,5) = \\ &= (0,0,0) + (0,0,0) = (0,0,0) \end{aligned}$$

- příklad netriviální, ale nenulové LK:

$$\begin{aligned} r_1=0, r_2=1 \dots r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 &= 0(4,0,-20) + 1(-1,0,5) = \\ &= (0,0,0) + (-1,0,5) = (-1,0,5) \end{aligned}$$

- příklad netriviální nulové LK:

$$\begin{aligned} r_1=2, r_2=8 \dots r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 &= 2(4,0,-20) + 8(-1,0,5) = \\ &= (8,0,-40) + (-8,0,40) = (0,0,0) \end{aligned}$$

# LINEÁRNÍ (NE)ZÁVISLOST

Vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  jsou lineárně závislé (LZ)  $\Leftrightarrow \exists$  jejich netriviální nulová LK.

Naopak jsou lineárně nezávislé (LN)  $\Leftrightarrow \nexists$  jejich netriviální nulová LK (čili jediná existující nulová LK je ta triviální).

Zkoumáme-li pouze dvojici vektorů ( $s=2$ ), pak ty jsou LZ  $\Leftrightarrow$  jeden je násobkem druhého.

Příklad – pokračování: Vektory  $\mathbf{v}_1=(4,0,-20)$  a  $\mathbf{v}_2=(-1,0,5)$  byly opravdu LZ, neboť:  $\mathbf{v}_1 = -4\mathbf{v}_2$

## Vlastnosti LZ vektorů

- (1) Vektory  $\mathbf{0}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  jsou vždy LZ
- (2) Vektory  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  jsou vždy LZ
- (3) Jsou-li  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  LZ, jsou LZ i vektory  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_{s+1}$
- (4) Jsou-li  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  LZ, pak aspoň jeden z nich je LK zbývajících

## Vlastnosti LN vektorů

Jsou-li  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$  LN, pak

- (1) žádný z nich není nulový
- (2) každé dva jsou navzájem různé
- (3) žádný není LK zbývajících
- (4) každá jejich podmnožina je také LN
- (5) pokud  $r \neq 0$ , též  $r\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$  jsou LN
- (6)  $\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_s\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_s$  jsou také LN

Označme  $n$  počet souřadnic vektorů (tzv. rozměr, dimenze); každá  $n$ -tice LN vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  tvoří **bázi** daného  $n$ -rozměrného vektorového prostoru; tj. kterýkoli  $n$ -rozměrný vektor lze zapsat jako LK vektorů báze (vektorů  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ ).

Příklad: Klasickou ukázkou báze je tzv. jednotková báze, která má např. pro  $n = 3$  tvar:  $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$ .

# MATICE (typu mn)

$\mathbf{A}_{mn}$  je „tabulka čísel“ (m řádků, n sloupců)

Její prvky:  $a_{ij}$ ,  $i=1 \dots m$ ,  $j=1 \dots n$ ;  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$

Rovnost:  $\mathbf{A}=\mathbf{B} \Leftrightarrow \forall i=1 \dots m, j=1 \dots n: a_{ij}=b_{ij}$

Součet:  $\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij}+b_{ij}]$

Násobek:  $r\mathbf{A} = [ra_{ij}]$

Transpozice: Je-li  $\mathbf{A}$  typu mn,  $\mathbf{B}$  typu nm a pro  $\forall i=1 \dots m, j=1 \dots n: a_{ij}=b_{ji}$ , pak  $\mathbf{B}=\mathbf{A}^T$

# MATICE $A_{mn}$ – speciální případy:

nulová  $\Leftrightarrow \forall i,j: a_{ij}=0$

čtvercová (řádu  $n$ )  $\Leftrightarrow m=n$

(značeno pak jen  $A_n$ )

její hlavní diagonála: prvky  $a_{ii}$

její vedlejší diagonála: prvky  $a_{i,n-i+1}$

|          |          |          |          |  |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|--|----------|----------|----------|----------|
| $a_{11}$ |          |          |          |  |          |          |          | $a_{14}$ |
|          | $a_{22}$ |          |          |  |          |          | $a_{23}$ |          |
|          |          | $a_{33}$ |          |  |          | $a_{32}$ |          |          |
|          |          |          | $a_{44}$ |  | $a_{41}$ |          |          |          |

# Čtvercové matice $A_n$ – speciální případy:

diagonální  $\Leftrightarrow \forall i \neq j: a_{ij} = 0$

skalární  $\Leftrightarrow \forall i \neq j: a_{ij} = 0 \wedge a_{ii} = r$

jednotková (I)  $\Leftrightarrow \forall i \neq j: a_{ij} = 0 \wedge a_{ii} = 1$

|   |    |   |    |  |    |    |    |    |  |   |   |   |   |
|---|----|---|----|--|----|----|----|----|--|---|---|---|---|
| 7 | 0  | 0 | 0  |  | -3 | 0  | 0  | 0  |  | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | -3 | 0 | 0  |  | 0  | -3 | 0  | 0  |  | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0  | 0 | 0  |  | 0  | 0  | -3 | 0  |  | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0  | 0 | 12 |  | 0  | 0  | 0  | -3 |  | 0 | 0 | 0 | 1 |

# Čtvercové matice $A_n$ – speciální typy:

horní trojúhelníková  $\Leftrightarrow \forall i > j: a_{ij} = 0$

dolní trojúhelníková  $\Leftrightarrow \forall i < j: a_{ij} = 0$

|   |   |   |  |  |  |   |   |   |
|---|---|---|--|--|--|---|---|---|
|   |   |   |  |  |  | 0 | 0 | 0 |
| 0 |   |   |  |  |  |   | 0 | 0 |
| 0 | 0 |   |  |  |  |   |   | 0 |
| 0 | 0 | 0 |  |  |  |   |   |   |

# Čtvercové matice $A_n$ – speciální typy:

symetrická  $\Leftrightarrow \forall i,j: a_{ij} = a_{ji}$  ( $A = A^T$ )

antisymetrická  $\Leftrightarrow \forall i,j: a_{ij} = -a_{ji}$  ( $A = -A^T$ )

|    |    |    |    |  |    |    |    |   |
|----|----|----|----|--|----|----|----|---|
| 2  | -1 | 0  | 4  |  | 0  | -1 | 0  | 4 |
| -1 | 3  | -7 | 8  |  | 1  | 0  | -7 | 8 |
| 0  | -7 | 0  | 3  |  | 0  | 7  | 0  | 3 |
| 4  | 8  | 3  | -1 |  | -4 | -8 | -3 | 0 |

# HODNOST MATICE

$h(A)$  ... je rovna maximálnímu počtu LN řad (řádků nebo sloupců) dané matice  $A$

určování  $h(A)$  převodem na stupňový tvar:

|   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? |
| 0 | 0 | X | ? | ? | ? | ? | ? |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | X |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

0...nula    X...nenulový prvek (pivot)    ?...libovolný prvek

$h(A)$ =počet pivotů, zde  $h(A)=3$

# URČENÍ HODNOSTI MATICE

povolené úpravy při převodu matic na  
stupňový tvar kvůli určení  $h(A)$  :

- (i) přehození dvou řad
- (ii) nenulový násobek dané řady
- (iii) přičtení násobku libovolné (jiné) řady  
k dané řadě

|    |    |   |    |                                                                                     |    |    |   |    |                                                                                       |   |    |   |   |
|----|----|---|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----|----|---|----|---------------------------------------------------------------------------------------|---|----|---|---|
| 0  | 0  | 0 | 0  |    | 2  | -2 | 0 | 1  |    | 2 | -2 | 0 | 1 |
| -4 | 4  | 0 | -2 |   | -4 | 4  | 0 | -2 |   | 0 | 0  | 0 | 0 |
| 2  | -2 | 0 | 1  |  | 0  | 0  | 0 | 0  |  | 0 | 0  | 0 | 0 |

Pro všechny tyto tři matice teď víme:  $h(A)=1$