

SOUČIN MATIC

$$\mathbf{A}_{mn} \mathbf{B}_{np} = \mathbf{C}_{mp}, \quad \text{přičemž:}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}, \quad i=1\dots m, j=1\dots p$$

0	0	2	0
4	1	0	0
2	-2	0	1

 $\cdot$

2	-2
4	1
0	0
1	0

 $=$

0	0
12	-7
-3	-6

Např: $2 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -3$

INVERZNÍ MATICE

Pro čtvercovou matici **B** může (ale nemusí) existovat inverzní matice $\mathbf{B}^{-1}$ taková, že:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$$

Čtvercová matice je regulární $\Leftrightarrow \exists$ matice k ní inverzní. Jinak se nazývá singulární.

Regulární matici lze poznat tak, že její hodnost = její řád (tj. $h(\mathbf{B})=n$).

INVERZNÍ MATICE - vlastnosti

Pro regulární matice téhož řádu je

$$(1) \quad (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$$

$$(2) \quad (\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

$$(3) \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

Důkaz (3): Pro inverzní matice musí platit $(\mathbf{AB}) \cdot (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{I}$. Ověřme, zda je to pravda i po dosazení pravé strany z tvrzení (3):

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (\textit{Quod Erat Demonstrandum}) \end{aligned}$$

INVERZNÍ MATICE – postup určení

- Vytvoříme pomocnou matici $B^* = B | I$
- Úpravami (viz stupňový tvar) převedeme B^* na tvar $I | X$
- Matice X je hledanou inverzí ($X=B^{-1}$)

Příklad: $B = \left| \begin{array}{cc|cc} 0,1 & 2 & 1 & 0 \\ 0,7 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right|$ $B^{-1} = \left| \begin{array}{cc|cc} -18 & 4 & & \\ 1,4 & -0,2 & & \end{array} \right|$

0,1	2	1	0	•7	0,7	14	7	0	•1/7	0,1	2	1	0	•5
0,7	9	0	1	~	0,7	9	0	1	+ ~	0	-5	-7	1	•2 ~

0,5	10	5	0	+ ~	0,5	0	-9	2	•2 ~	1	0	-18	4	
0	-10	-14	2	•1/2	0	-5	-7	1	•-0,2	0	1	1,4	-0,2	

DETERMINANT ČTVERCOVÉ MATICE

- Jde o číslo vyjadřující, jaké prvky a na jakých pozicích se v dané matici vyskytují.
- $k=k(1), \dots, k(n)$ permutace čísel $1, \dots, n$

Příklad: $n=3$, čísla jsou 1,2,3 a jejich permutacemi je např. (po přehození 1 a 2) $k=2,1,3$ nebo (po dalším přehození, 1 a 3) $k^*=2,3,1$, atd.

- Je-li počet přehození lichý (např. u k), jde o lichou permutaci a $\text{sgn}(k) = -1$; je-li tento počet sudý (viz k^*), jde o sudou permutaci a $\text{sgn}(k^*) = 1$.

DETERMINANT ČTVERCOVÉ MATICE

- Pro n prvků $\exists n!$ permutací (včetně tzv. identické $k=1,2,\dots,n$, jejíž $\text{sgn}(k)=1$).
- Pro libovolnou permutaci k vypočteme z matice $A=[a_{ij}]$ řádu n hodnotu

$$\text{sgn}(k) \cdot a_{1\,k(1)} \cdot a_{2\,k(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\,k(n)}$$

Příklad: Mějme tuto matici
řádu $n=3$:

7	1	-2
-1	1	3
0	1	4

Pro permutaci $k=2,1,3$ dostaneme dosazením:

$$\text{sgn}(k) \cdot a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 = 4$$

(viz hodnoty v šedě zvýrazněných polích).

DEFINICE

- Determinant čtvercové matice $\det(\mathbf{A})$ je definován jako součet výrazů:

$$\text{sgn}(k) \cdot a_{1,k(1)} \cdot a_{2,k(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,k(n)}$$

pro všechny permutace (včetně identické).

Příklad (pokračování): Pro každou matici řádu $n=3$ existuje $3!=6$ různých permutací:

$$(+)\ 1,2,3 \quad (-)\ 1,3,2 \quad (+)\ 2,3,1$$

$$(-)\ 2,1,3 \quad (+)\ 3,1,2 \quad (-)\ 3,2,1$$

Platí tedy vždy, že:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) = & a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ & - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{aligned}$$

DETERMINANT ČTVERCOVÉ MATICE

Příklad (dokončení):

Pro tuto matici tedy bude
mít její determinant hodnotu

7	1	-2
-1	1	3
0	1	4

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ &\quad - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \\ &= 7 \cdot 1 \cdot 4 - 7 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 \\ &\quad - 1 \cdot (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 1 \cdot 0 = \\ &= 28 - 21 + 0 + 4 + 2 + 0 = 13\end{aligned}$$

DETERMINANT - křížová pravidla

- Vzorec na výpočet si lze zapamatovat díky tzv. křížovému (Sarrusovu) pravidlu.
- Pravidlo pro determinant (matice) řádu $n=2$:

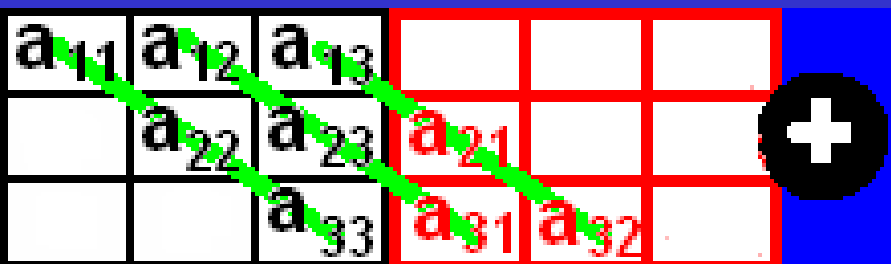
a_{11}	a_{12}
a_{21}	a_{22}

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

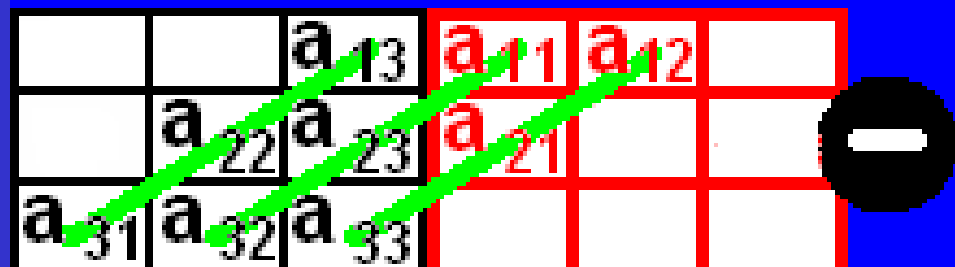
(zkusit sami odvodit z definice)

- Pravidlo pro determinant (matice) řádu $n=3$:

a_{11}	a_{12}	a_{13}			
	a_{22}	a_{23}	a_{21}		
		a_{33}	a_{31}	a_{32}	



		a_{13}	a_{11}	a_{12}	
	a_{22}	a_{23}	a_{21}		
a_{31}	a_{32}	a_{33}			



DETERMINANT trojúhelníkové matice

- Pro $n > 3$ bohužel křížové pravidlo ne $\exists$ (!)
- Jelikož výpočet $\det(A)$ podle definice by byl pro $n > 3$ složitý, ukažme si jiné způsoby.

a) Necht' A je trojúhelníková matice (horní nebo dolní), pak: $\det(A) = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn}$

$\det(A)$ lze tedy určit tak, že zadanou matici převedeme na 3-ový tvar, přičemž povolené jsou tyto úpravy:

- (i) k danému řádku přičíst libovolný násobek řádku jiného;
- (ii) záměna dvou řádků, jeden mění znaménko.

DETERMINANT trojúhelníkové matice

Příklad:

Převodem na 3-ový tvar
určíme $\det(A)$ pro matici:

7	1	-2
-1	1	3
0	1	4

7	1	-2
-1	1	3
0	1	4

• $1/7$

1	$1/7$	$-2/7$
-1	1	3
0	1	4

• 7

7	1	-2
0	$8/7$	$19/7$
0	1	4

• $-7/8$

7	1	-2
0	-1	$-19/8$
0	1	4

• $-8/7$

7	1	-2
0	$8/7$	$19/7$
0	0	$32/8 - 19/8$

7	1	-2
0	$8/7$	$19/7$
0	0	$13/8$

Tudíž: $\det(A) = 7 \cdot (8/7) \cdot (13/8) = 13$ (již vyšlo)

DETERMINANT - algebraický doplněk

b) Označme jako A_{rs} matici, která zbude ze čtvercové matice A po vynechání r -tého řádku a s -tého sloupce (např. A_{32} je na obrázku žlutě zvýrazněna)

	•		

Pro prvek a_{rs} (na obrázku je prvek a_{32} vyznačen bodem)

je jeho algebraickým doplňkem hodnota

$$d_{rs} = (-1)^{r+s} \cdot \det(A_{rs})$$

DETERMINANT - algebraický doplněk

Příklad: Pro všechny prvky dané matice určíme jejich algebraické doplňky

7	1	-2
-1	1	3
0	1	4

$$d_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det(\mathbf{A}_{11}) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$d_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det(\mathbf{A}_{12}) = (-1) \cdot (-4) = 4$$

...

$$d_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det(\mathbf{A}_{33}) = 1 \cdot 8 = 8$$

DETERMINANT - algebraický doplněk

- Příklad (pokračování): Přehledně zapišme všechny nalezené hodnoty algebraických doplňků do matice $[d] =$

1	4	-1
-6	28	-7
5	-19	8

Její transpozice $[d]^T = \mathbf{A}^*$ je tzv. matice adjungovaná k matici $\mathbf{A}$ a platí:

$$(\det \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^{-1}$$

Hodnoty d ale hlavně slouží při „rozvoji“:

DETERMINANT - algebraický doplněk

Věta Laplaceova o rozvoji:

Budiž d_{rs} algebraický doplněk prvku a_{rs} . Pak

$$\det \mathbf{A} = a_{r1}d_{r1} + \dots + a_{rn}d_{rn} \text{ (rozvoj dle } r. \text{ řádku)}$$

$$\det \mathbf{A} = a_{1s}d_{1s} + \dots + a_{ns}d_{ns} \text{ (rozvoj dle } s. \text{ sloupce)}$$

Poznámka: V praxi volíme tu řadu, která obsahuje co nejvíce nulových prvků a_{rs} (pro ně není potřeba znát algebraický doplněk).

DETERMINANT - algebraický doplněk

Příklad – výpočet determinantu rozvojem: Již víme, že k matici **A** (vpravo) má matice jejích algebraických doplňků [d] tvar (vpravo).

7	1	-2
-1	1	3
0	1	4

1	4	-1
-6	28	-7
5	-19	8

Rozvojem např. podle 1.sloupce dostaneme:

$$\det \mathbf{A} = 7 \cdot 1 + (-1) \cdot (-6) + 0 \cdot 5 = 7 + 6 + 0 = 13.$$

Podobně rozvojem podle 3.řádku bude:

$$\det \mathbf{A} = 0 \cdot 5 + 1 \cdot (-19) + 4 \cdot 8 = 0 - 19 + 32 = 13.$$