

DETERMINANT - vlastnosti

- 1) $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A} \cdot \det\mathbf{B}$
- 2) $\det(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}$ je singulární

Poznámka: Součin matic, inverzní matici a hodnotu determinantu lze určit i pomocí Excelu:

Soustavy lineárních algebraických rovnic (SR)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & -8 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 10 \\ x_2 + 4x_3 & = & 11 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ kde } \mathbf{A}_{m/n}, \mathbf{x}=(x_1 \dots x_n), \mathbf{b}=(b_1 \dots b_m)$$

$$\text{SR } \underline{\text{neřešitelná}} \Leftrightarrow \neg \exists \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\text{SR } \underline{\text{řešitelná}} \Leftrightarrow \exists (\text{aspoň } 1) \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \dots \text{bud':}$$

$$\text{SR } \underline{\text{jednoznačně řešit.}} \Leftrightarrow \exists! (\text{právě } 1) \mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Soustavy lineárních algebraických rovnic (SR)

nebo:

SR víceznačně řešit. $\Leftrightarrow$ je řešitelná, ale nikoli
(pouze) jednoznačně; pak má ∞ řešení, ta se
musí zapsat parametricky.

$\mathbf{A}$...matice SR,

$\mathbf{A}^R$...rozšířená matice SR (o sloupec $\mathbf{b}$)

Věta Frobeniova: SR $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ je řešitelná $\Leftrightarrow$
 $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^R)$.

Soustavy lineárních algebraických rovnic (SR)

Dodatky k Frobeniově větě:

- a) Pokud $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^R) = n$, je SR řešitelná jednoznačně.
- b) Pokud $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}^R) < n$, je SR řešitelná víceznačně, přičemž počet parametrů nutných pro zápis řešení je: $n - h(\mathbf{A})$.

SR s regulární maticí

SR $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, $\mathbf{A}$ regulární (čtvercová $\mathbf{A}_n$, $\det\mathbf{A}\neq 0$).

I. Řešení pomocí věty Cramerovy:

$$x_i = \det\mathbf{A}_i / \det\mathbf{A}$$

kde matice $\mathbf{A}_i$ vznikne záměnou i -tého sloupce
v matici $\mathbf{A}$ za vektor pravých stran $\mathbf{b}$

II. Řešení pomocí inverzní matice: $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

SR s regulární maticí

Příklad: Řešení metodou I. Již zmíněné SR

odpovídá A^R (b žlutě):

Platí: $\det A = 13$

7	1	-2	-8
-1	1	3	10
0	1	4	11

 $A_1 =$

-8	1	-2
10	1	3
11	1	4

$$\det A_1 = -13$$

$$x_1 = -13/13 = -1$$

 $A_2 =$

7	-8	-2
-1	10	3
0	11	4

$$\det A_2 = 39$$

$$x_2 = 39/13 = 3$$

 $A_3 =$

7	1	-8
-1	1	10
0	1	11

$$\det A_3 = 26$$

$$x_3 = 26/13 = 2$$

SR s regulární maticí

Příklad (pokračování): Řešení metodou II.

Díky adjungované matici (již byla) lze určit inverzní matici $\mathbf{A}^{-1}$:

1 / 13	-6 / 13	5 / 13
4 / 13	28 / 13	-19 / 13
-1 / 13	-7 / 13	8 / 13

takže po vynásobení bude $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x} =$

-1
3
2

SR ne/homogenní (s obecnou maticí)

SR $Ax=b$ je nehomogenní $\Leftrightarrow \exists b_i: b_i \neq 0$.

SR $Ax=b$ je homogenní $\Leftrightarrow b=0$; pro ni

- vždy $\exists$ triviální řešení ($x=0$)
- jsou-li sloupce A LN, jiné řešení už $\nexists$

(Ne)homogenní soustavu lze řešit

Jordanovou eliminační metodou:

1. Převod A^R na stupňový tvar G^R .
2. Převod G^R na zesílený stupňový tvar F^R (tj. i nad každý pivot dostat 0).

SR ne/homogenní (s obecnou maticí)

Jordanova eliminační metoda:

3. Rozlišíme bazické proměnné (v jim příslušném sloupci matice F je pivot) od nebazických – z těch budou parametry.
4. Z nenulových rovnic vyjádříme zbylé (tj.bazické) proměnné pomocí parametrů.