

FUNKCE (reálná funkce jedné proměnné)

$$y = f(x) \Leftrightarrow \forall x \in D(f) \exists! y \in H(f)$$

$$f : D(f) \rightarrow H(f)$$

$$\text{GRAF FUNKCE} = \{[x ; f(x)] : x \in D(f)\}$$

Příklad: Význam definičního oboru?

$$f(x) = 1 + x^2 \quad g(x) = 1 + x^3/x \quad \dots \text{ jsou identické?}$$

Ne!!! Sice $f(x) = g(x)$, ale jen pro $x \in D(g)$:

$$D(f) = \mathbf{R}, \text{ zatímco } D(g) = \mathbf{R} - \{0\} \quad (\text{graf?})$$

FUNKCE (sudá a lichá)

Funkce f je sudá $\Leftrightarrow \forall x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$
a platí: $f(x) = f(-x)$.

Graf musí mít souměrný dle svislé osy.

Příklad: $f(x) = 2+x^4$, $f(x) = \cos(x)$

FUNKCE (sudá a lichá)

Funkce f je lichá $\Leftrightarrow \forall x \in D(f)$ je též $-x \in D(f)$
a platí: $f(x) = -f(-x)$.

Graf musí mít souměrný dle počátku.

Příklad: $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin(x)$

Poznámka: Existují funkce, které nejsou ani sudé, ani liché, např. $f(x) = 1 + x^3$, $f(x) = e^x, \dots$

FUNKCE (periodická)

Funkce f je periodická s periodou $p \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \forall x \in D(f)$ je též $x+p \in D(f)$ a platí:
$$f(x) = f(x+p).$$

Graf musí mít pravidelně se opakující úseky délky p .

Příklad: $f(x) = \sin(x)$ (všechny goniometr.)

FUNKCE (extrémy)

- Necht' $\exists a \in A \subset D(f)$: pro $\forall x \in A$ $f(x) \geq f(a)$
pak $a = \underline{\text{bod lokálního minima}}$ f na A ;
pokud navíc $A = D(f)$, jde o minimum globální
- Necht' $\exists b \in A \subset D(f)$: pro $\forall x \in A$ $f(x) \leq f(b)$
pak $b = \underline{\text{bod lokálního maxima}}$ f na A ;
pokud navíc $A = D(f)$, jde o maximum globální

FUNKCE (omezená)

- Funkce f je omezená (ohraničená) zdola

$$\Leftrightarrow \exists d \in \mathbf{R}: \forall x \in D(f) \quad f(x) \geq d$$

Příklad: $f(x) = 3+x^2$ ($d = -1$; $d = 3$; ...)

- d ... dolní závory; infimum = maximální hodnota mezi nimi (např. v příkladu výše?)
- Na cvičení: Je nebo není infimum vždy totéž jako minimum? ($g(x)$ na 1.snímku?)

FUNKCE (omezená)

- Funkce f je omezená (ohraničená) shora

$$\Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{R}: \forall x \in D(f) \quad f(x) \leq h$$

Příklad: $f(x) = 4 - x^2$ ($h=17$; $h=4$; ...)

- h ...horní závory; supremum = minimální hodnota mezi nimi (např. v příkladu výše?)
- Je/není supremum totéž jako maximum?
- Funkce f je omezená (ohraničená)
 $\Leftrightarrow$ je ohraničená zdola i shora

FUNKCE (ryze monotónní)

- Funkce f je rostoucí na množině $A \Leftrightarrow$
 $\forall x_1 < x_2 \in A \subseteq D(f) : f(x_1) < f(x_2)$

Příklad: $f(x) = 3+x^2$, $A=\mathbf{R}^+$
 $f(x) = e^x$, $A=D(f)=\mathbf{R}$

- Funkce f je klesající na množině $A \Leftrightarrow$
 $\forall x_1 < x_2 \in A \subseteq D(f) : f(x_1) > f(x_2)$

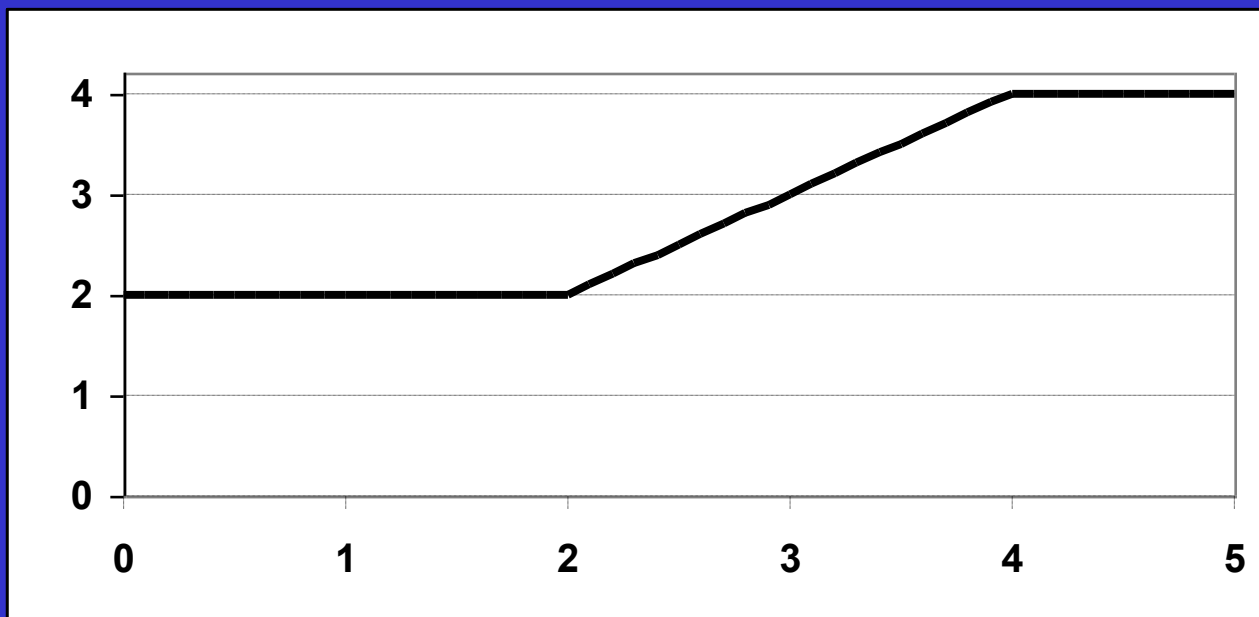
Příklad: $f(x) = 3+x^2$, $A=\mathbf{R}^-$
 $f(x) = e^{-x}$, $A=D(f)=\mathbf{R}$

FUNKCE (monotónní)

- Funkce f je neklesající na množině $A \Leftrightarrow$
 $\forall x_1 < x_2 \in A \subseteq D(f) : f(x_1) \leq f(x_2)$

Příklady: a) Každá rostoucí $f(x)$

b) Např. $f(x)$ na $A=(0;5)$ s grafem:

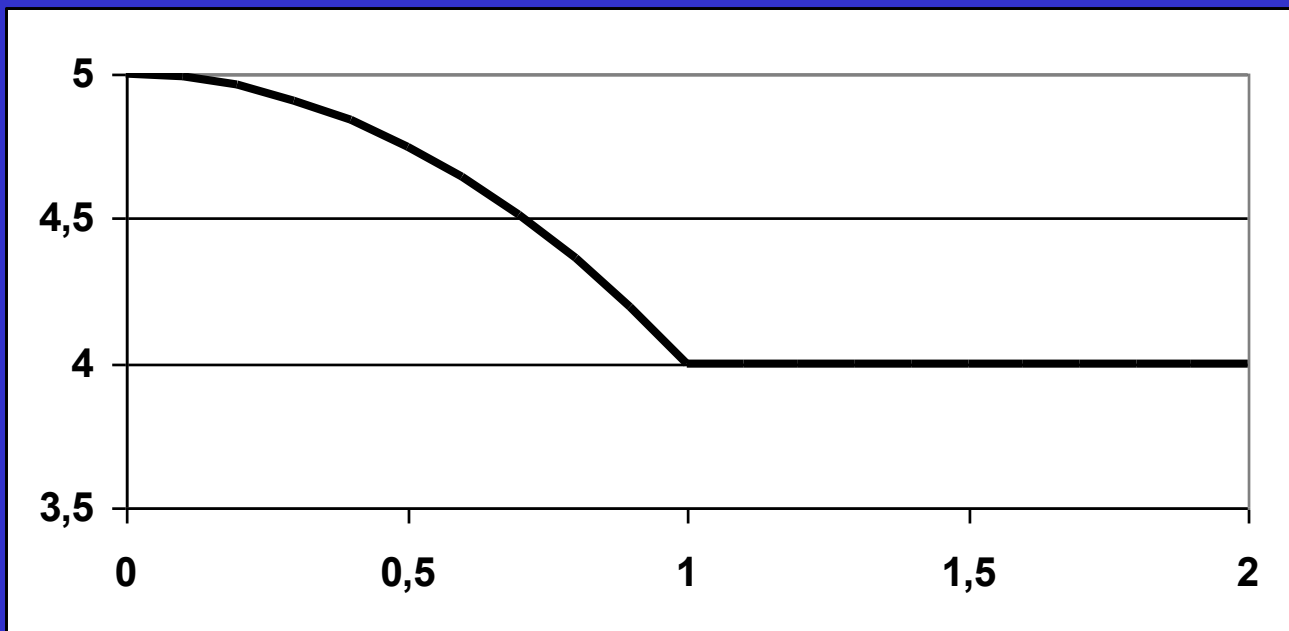


FUNKCE (monotónní)

- Funkce f je nerostoucí na množině $A \Leftrightarrow$
 $\forall x_1 < x_2 \in A \subseteq D(f) : f(x_1) \geq f(x_2)$

Příklady: a) Každá klesající $f(x)$

b) Např. $f(x)$ na $A=(0;2)$ s grafem:



FUNKCE (prostá)

- Funkce f je prostá na množině $A \Leftrightarrow$
$$\forall x_1 \neq x_2 \in A \subseteq D(f) : f(x_1) \neq f(x_2)$$

Jinak řečeno: Funkce je prostá, pokud pro $\forall$
 $f(x)$ jednoznačně vím, jakému x patří.

Příklad: Zkusit načrtnout graf, který

a) nebude odpovídat funkci.

b) bude odpovídat funkci, ale ne prosté.

c) bude odpovídat prosté funkci.

FUNKCE (složená)

Mějme funkci $u=g(x)$, $D(g)=A$.

Mějme funkci $y=f(u)$, $D(f)=B \subseteq H(g)$.

Pak $y = f[g(x)]$ je složená funkce ($f \circ g$),
přiřazující každému x hodnotu y .

g ...vnitřní funkce, f ...vnější funkce

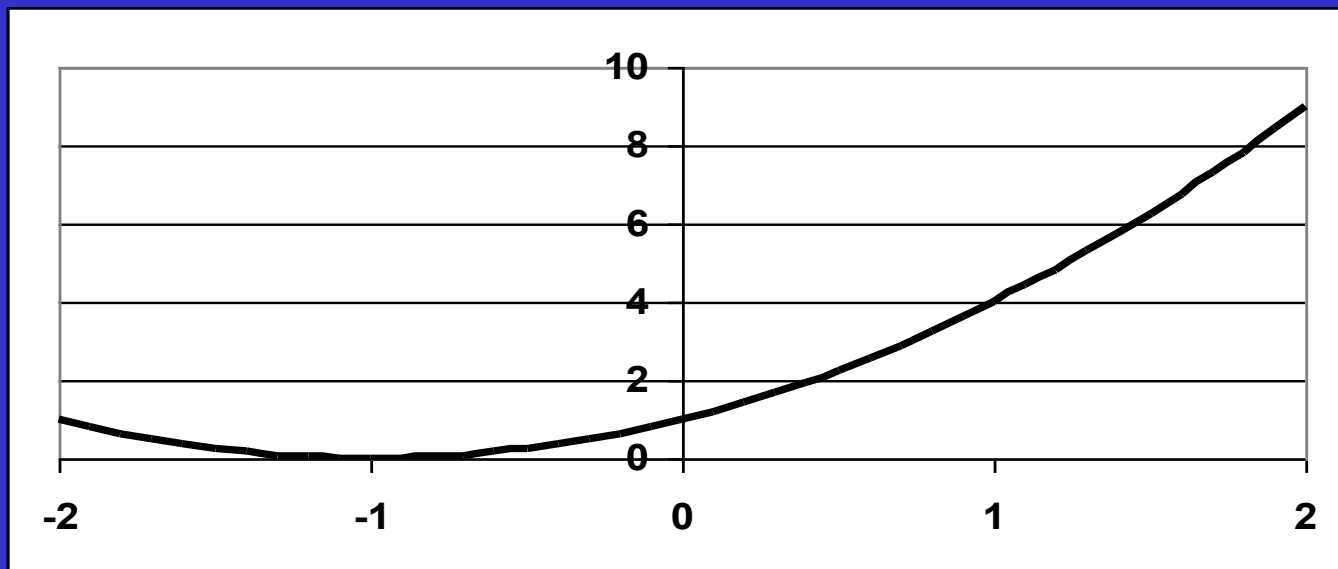
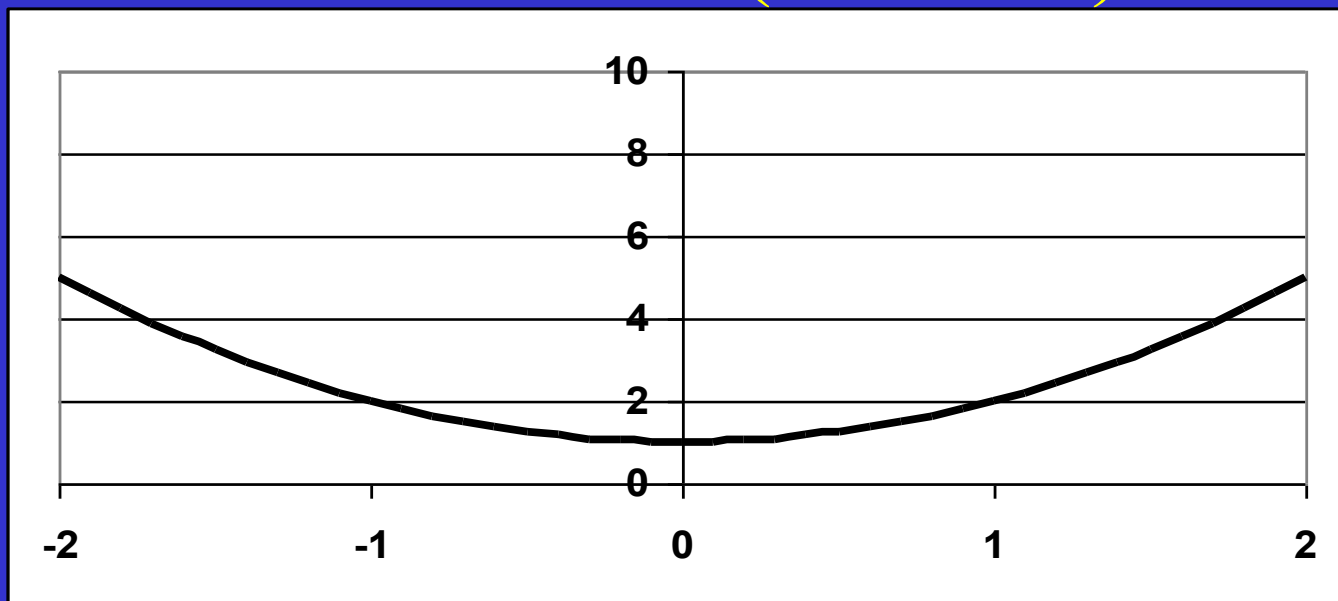
Příklad: Načrtnout graf složené funkce

$y = f[g(x)]$ pro $A=(-2;2)$, když

a) $g(x) = x^2$ $f(u) = u+1$

b) $g(x) = x+1$ $f(u) = u^2$ řešení?

FUNKCE (složená)



FUNKCE (inverzní)

Mějme prostou funkci $f: A \rightarrow B$.

Necht' $f_{-1}: B \rightarrow A$, přičemž

$$f_{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

Grafy f a f_{-1} souměrné dle přímky $y=x$

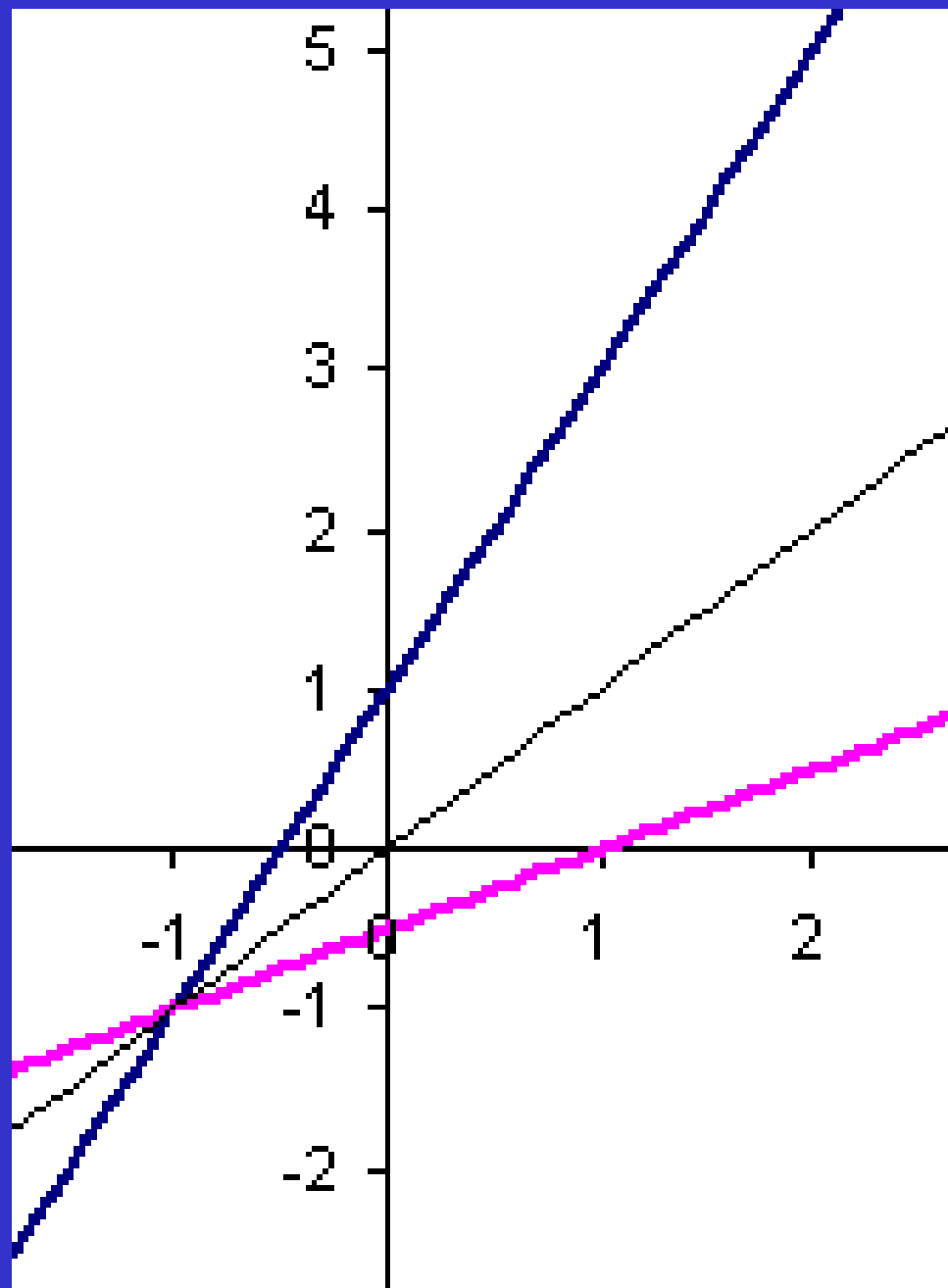
Poznámka: Není-li f prostá na celém $D(f)$, lze invertovat jen vybranou část ($f: y=x^2$)

Postup: $f \dots y = 2x + 1$, $f_{-1} \dots y = ?$

1) Vyjádřit x : $x = (y-1)/2$

2) Prohodit značení x a y : $y = (x-1)/2$

FUNKCE (inverzní)



FUNKCE (přehled)

Signum (znaménko)	$\text{sgn}(x)$	$\text{sgn}(-3,7) = -1$
-------------------	-----------------	-------------------------

Absolutní hodnota	$ x $	$ -3,7 = 3,7$
-------------------	-------	----------------

Celá část	$[x]$	$[-3,7] = -4$
-----------	-------	---------------

Identita	$\text{id}(x)$	$\text{id}(-3,7) = -3,7$
----------	----------------	--------------------------

FUNKCE (přehled)

Konstanta $f(x)=c$

Lineární $f(x)=ax+b, a \neq 0$

Kvadratická $f(x)=ax^2+bx+c, a \neq 0$

Mocninná $f(x)=x^n, n \in \mathbf{N}$ (sudé/liché-graf?)
 $f(x)=x^{-n}=1/x^n, n \in \mathbf{N}$ (sudé/liché)
(protože $f(x)=x^0=1$, nelze $n=0$)