

FUNKCE (přehled-pokračování)

Polynom (mnohočlen) n-tého stupně (řádu):

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

b je jeho **kořen**, pokud $P_n(b) = 0$,

$$\text{platí } P_n(x) = (x-b)^k Q_{n-k}(x), \quad k \geq 1$$

(rozklad, b je tzv. k-násobný kořen)

$$\text{Příklad: } P_4(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 =$$

$$= x^2(x^2 + 6x + 9) = x^2(x+3)^2 = (x-\underline{0})^2[x-\underline{(-3)}]^2,$$

takže kořeny jsou $b=0$ a $b=-3$ (oba 2-násobné)

FUNKCE (přehled)

Racionální lomená funkce $y = P_m(x)/S_n(x)$
(P,S polynomy; pokud $m < n$...“ryze lomená“)

Logaritmus (se základem a)

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y \quad (a > 0, a \neq 1)$$

Vlastnosti:

- 1) $D = \mathbf{R}_+$, $H = \mathbf{R}$, vždy $\log_a(1) = 0$
- 2) $a > 1$...rostoucí, $0 < a < 1$...klesající
- 3) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$, $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a(x)$

FUNKCE (přehled)

Logaritmus (se speciálními základy):

Dekadický $\log_{10}(x) = \log(x)$

Přirozený $\log_e(x) = \ln(x)$, $e=2,71828$

Vlastnosti:

1) $\ln(x) \leq x-1$ na celém $\mathbf{R}^+$

2) $\log_a(x) = \log(x)/\log(a) = \ln(x)/\ln(a)$

FUNKCE (přehled)

Příklad – využití 2) bez kalkulačky:

$$\log_{100}(100.000) = ?$$

$$= \log(100.000) / \log(100) = 5/2 = 2,5$$

Příklad – využití 2) s kalkulačkou:

$$\log_2(14) = ?$$

$$= \log(14) / \log(2) = 1,146 / 0,301 = 3,807$$

nebo

$$= \ln(14) / \ln(2) = 2,639 / 0,693 = 3,807$$

$$\text{Zkouška: } 2^{3,807} = 14.$$

FUNKCE (přehled)

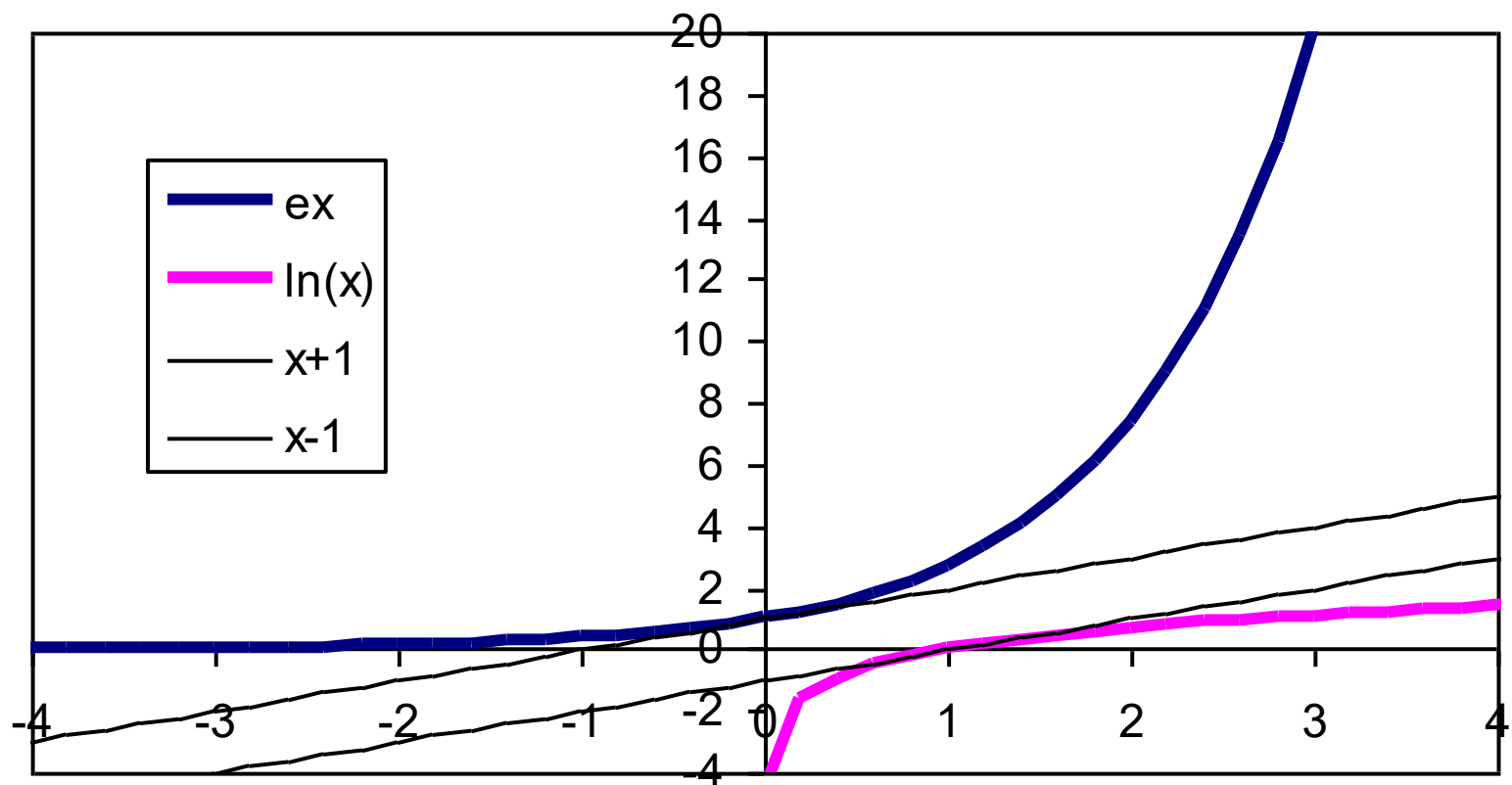
Exponenciální funkce (se základem a)

$$y=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$$

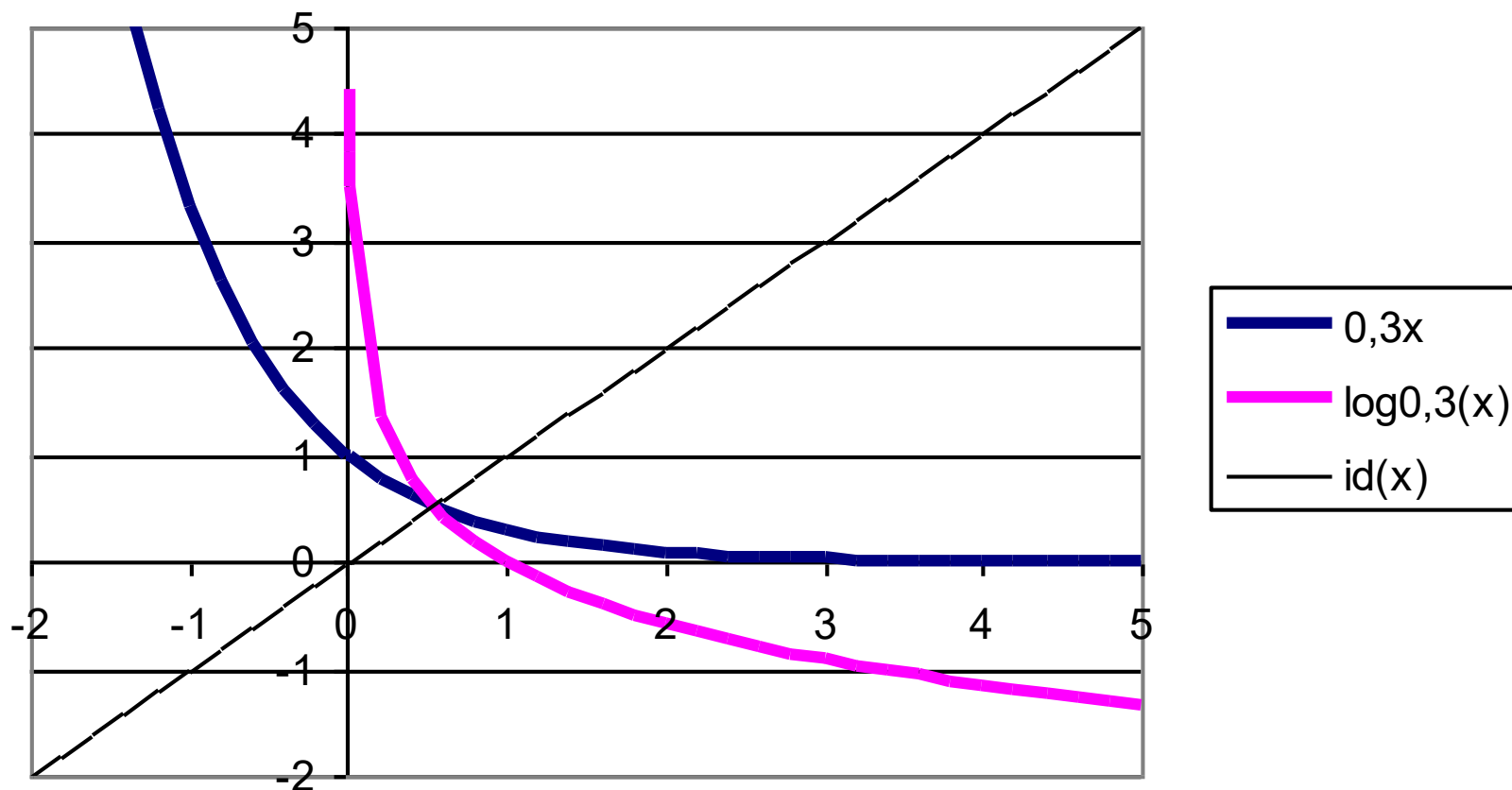
Vlastnosti:

- 1) Logaritmus a exponenciála o stejném základu jsou fce navzájem inverzní
- 2) $D=\mathbf{R}$, $H=\mathbf{R}^+$, vždy $a^0=1$
- 3) $a>1$...rostoucí, $0<a<1$...klesající
- 4) spec.případ $y=e^x \geq x+1$ na celém $\mathbf{R}$

Graf: $\ln(x)$, e^x (základ $e > 1$)



Graf: Exponenciála a logaritmus při základu menším než 1



FUNKCE (přehled)

Funkce goniometrické

$\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

znát průběh (D, perioda, průsečíky s osou x)

Funkce cyklometrické – k nim inverzní

$\arcsin x$,

$\arccos x$,

$\operatorname{arctg} x$,

$\operatorname{arccotg} x$

ÚPLNÉ OKOLÍ BODU

oboustranné úplné δ -okolí bodu b :

$$U_\delta(b) = (b-\delta, b+\delta)$$

pravé úplné δ -okolí bodu b :

$$U_\delta(b+) = [b, b+\delta)$$

levé úplné δ -okolí bodu b :

$$U_\delta(b-) = (b-\delta, b]$$

PRSTENCOVÉ OKOLÍ BODU

oboustranné prstencové δ -okolí bodu b :

$$P_{\delta}(b) = (b-\delta, b) \cup (b, b+\delta)$$

pravé prstencové δ -okolí bodu b :

$$P_{\delta}(b+) = (b, b+\delta)$$

levé prstencové δ -okolí bodu b :

$$P_{\delta}(b-) = (b-\delta, b)$$

HROMADNÝ BOD

Bod b je hromadný bod množiny $M \Leftrightarrow$
pro $\forall \delta > 0 \exists x \in M \cap P_\delta(b)$.

Poznámka: Nemusí být přitom $b \in M$.

Bod $d \in M$, který není pro M hromadným bodem, je tzv. izolovaný bod.

Příklad: $M = \{1, 2\} \cup (2, 5)$.

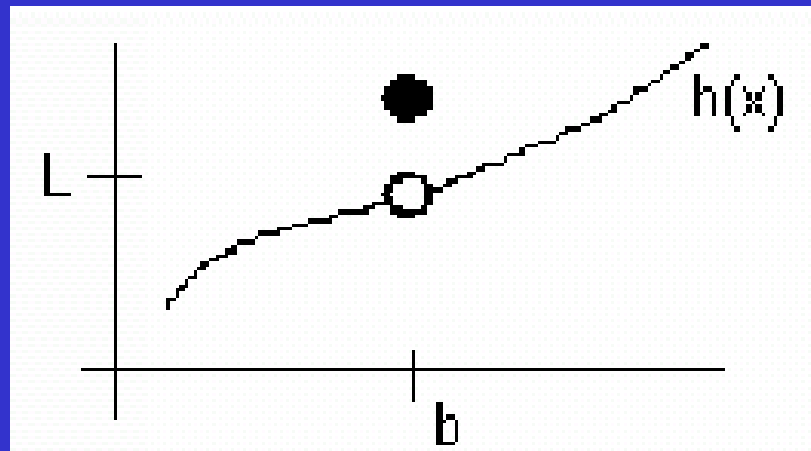
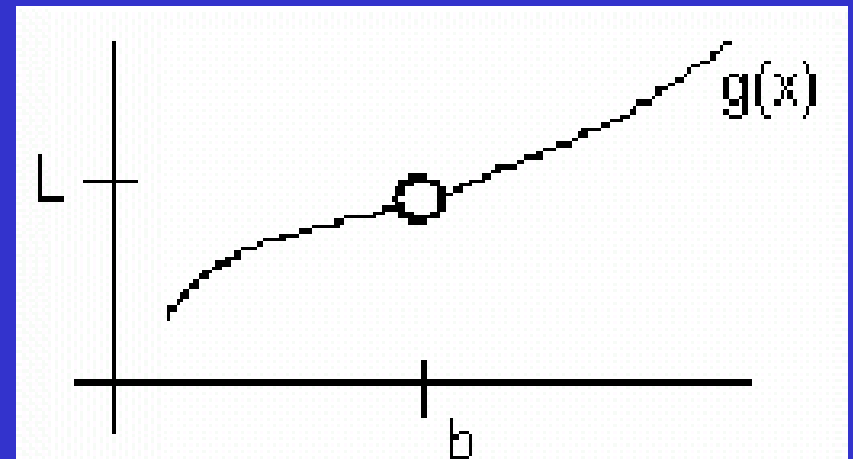
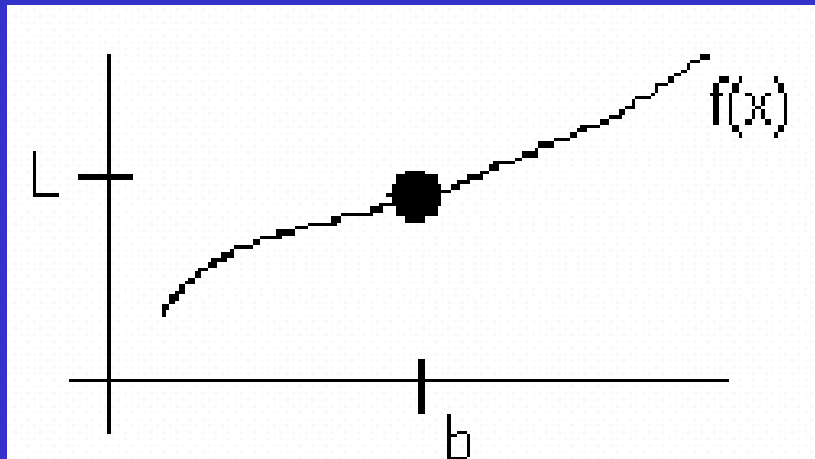
a) Všechny hromadné body?

b) Všechny izolované body?

a) $[2, 5]$ b) $\{1\}$

LIMITA

Fce $f(x)$ má v bodě b limitu L (značení!) $\Leftrightarrow$
 $\forall U_\varepsilon(L) \exists P_\delta(b): |f(x)-L| < \varepsilon$ pro $\forall x \in P_\delta(b)$



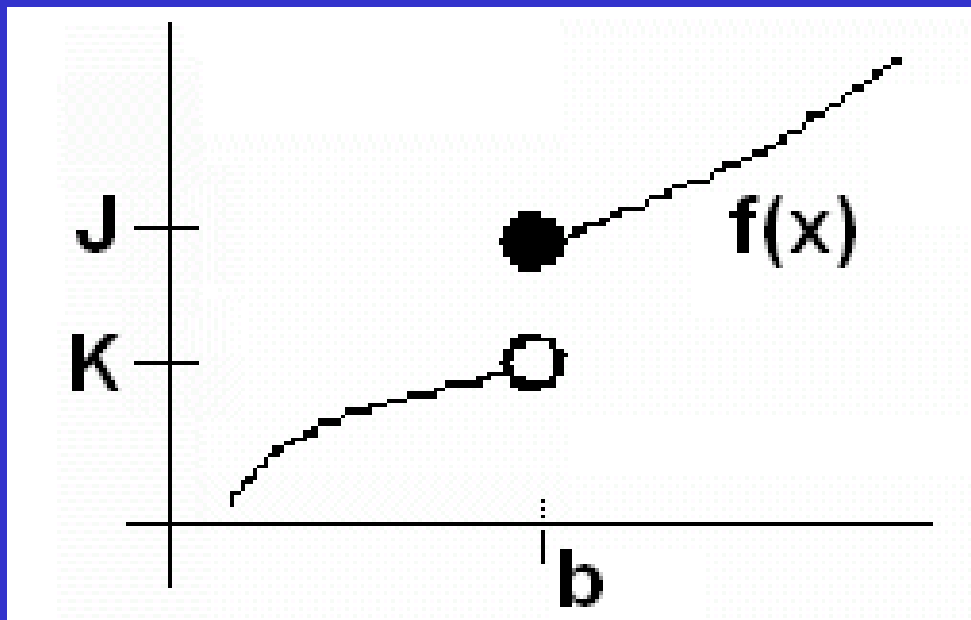
JEDNOSTRANNÁ LIMITA

K je limita zleva v bodě b (značení!) $\Leftrightarrow$

$$\forall U_\varepsilon(K) \exists P_\delta(b-): |f(x)-K|<\varepsilon \text{ pro } \forall x \in P_\delta(b-)$$

J je limita zprava v bodě b (značení!) $\Leftrightarrow$

$$\forall U_\varepsilon(J) \exists P_\delta(b+): |f(x)-J|<\varepsilon \text{ pro } \forall x \in P_\delta(b+)$$



Poznámka:

Limita v b existuje,
pokud existují obě
limity jednostranné
a jsou shodné.