

NEVLASTNÍ BODY, SPOJITOST

- chování ve „vlastních“ bodech, ale i „v nevlastních“ bodech ($\pm\infty$)

Příklady: Graf, limity?

a) $b=\pm\infty$ $f(x)=2+e^x$

b) $b=0, b=\infty$ $f(x)=\ln(x)$

c) $b=0, b=\pm\infty$ $f(x)=1/x$

Funkce $f(x)$ je spojitá (zprava/zleva) v bodě $b \Leftrightarrow f(b)$ je rovna limitě (zprava/zleva) v b .

Příklad: Spojitost u všech předešlých grafů?

DERIVACE - DEFINICE

Funkce $f(x)$ má v bodě b derivaci $f'(b)$ pokud pro $h \rightarrow 0$ existuje limita

$$[f(b+h) - f(b)] / h$$

Motivace: $[f(b+h) - f(b)] / h$

udává směrnici (jednotkový přírůstek)
sečny k f , procházející body

$$[b, f(b)], [b+h, f(b+h)].$$

Pro $h \rightarrow 0$ se ze sečny stane tečna, takže derivace udává směrnici (sklon) tečny.

DERIVACE - PRAVIDLA

$$f(x)=c \qquad f'(x)=0$$

$$f(x)=cx \qquad f'(x)=c$$

$$f(x)=x^n \qquad f'(x)=nx^{n-1}$$

použít pro $f(x)=\sqrt{x}$, nebo $f(x)=1/x$

$$f(x)=\sin x \qquad f'(x)=\cos x$$

$$f(x)=\cos x \qquad f'(x)=-\sin x$$

$$f(x)=\operatorname{tg} x \qquad f'(x)=(\cos x)^{-2}$$

$$f(x)=\operatorname{cotg} x \qquad f'(x)=-(\sin x)^{-2}$$

DERIVACE - PRAVIDLA

$$f(x)=a^x \quad (a>0) \qquad f'(x)=a^x \ln(a)$$

$$\text{spec. } f(x)=e^x \qquad f'(x)=e^x$$

$$f(x)=\log_a(x) \quad (a>0, a\neq 1) \qquad f'(x)=[x \ln(a)]^{-1}$$

$$\text{spec. } f(x)=\ln(x) \qquad f'(x)=(x)^{-1}$$

$$(cf)'= cf' \qquad (f\pm g)'= f' \pm g'$$

$$(fg)'= f'g + f g'$$

$$(f/g)'= (f'g - f g') / g^2$$

DERIVACE – PŘÍKLADY

1. Zderivujte (bez i s použitím pravidla pro násobení): $y=3x^2+x\sqrt{x}$

$$y'=3 \cdot (x^2)' + (x^{3/2})' = 3 \cdot 2x + 1,5x^{1/2} = 6x + 1,5\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} y' &= 3 \cdot (x^2)' + (x \cdot x^{1/2})' = \\ &= 3 \cdot 2x + [x' \cdot x^{1/2} + x \cdot (x^{1/2})'] = \\ &= 6x + (1 \cdot x^{1/2} + x \cdot 0,5x^{-1/2}) = 6x + \sqrt{x} + 0,5\sqrt{x} = \\ &= 6x + 1,5\sqrt{x} \end{aligned}$$

2. Ověřte platnost pravidla pro derivaci funkce tangens (tg=sin/cos, der.podílu)

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

$$f[g(x)]' = f'(u) \cdot g'(x), \quad \text{kde } u = g(x)$$

Příklad:

$$[\sin(x^2)]' = \cos(u) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

$$[(\sin x)^2]' = 2u \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x$$

DERIVACE VYŠŠÍHO ŘÁDU

Derivace funkce je definována pro všechna x (pro něž existuje), takže je sama funkcí a jako taková může být znovu (a znovu...) derivována:

$$f^{(2)} = (f')'$$

$$f^{(3)} = (f^{(2)})'$$

$$f^{(4)} = (f^{(3)})'$$

...

Příklad: Určete $f^{(2)}(x)$ pro $f(x) = \sin^2 x$

ROVNICE TEČNY

Pro $f(x)$ je hodnota $f'(b)$ směrnicí tečny v bodě $[b, f(b)]$.

Celá rovnice tečny má tvar:

$$y = f(b) + f'(b) \cdot (x - b)$$

Příklad: Určete rovnici tečny pro funkci $f(x) = 4 + x^2$ v bodě $b = 1$.

DIFERENCIÁL

Diferenciál $df(x)$ je definován jako přírůstek (resp. pokles) ne funkce $f(x)$, ale její tečny:

$$df(x) = f'(x) \cdot h$$

Odhadujeme pomocí něj přírůstek (resp. pokles) dané funkce f poblíž bodu x .

Využíváme tedy to, že:

$$df(x) \approx f(x+h) - f(x), \quad \text{po úpravě}$$

$$f(x+h) \approx f(x) + df(x)$$

DIFERENCIÁL - PŘÍKLAD

Příklad: Pomocí diferenciálu odhadněte hodnotu $f(x)=\sqrt{x}$ pro $x=103$.

Samozřejmě že díky kalkulačce lze zjistit přímo hodnotu $\sqrt{103}$, ale teď to řešme jinak:

$f(x)=x^{0,5}$, takže $f'(x)=0,5x^{-0,5}=0,5/\sqrt{x}$

použijme „jednoduchou“ hodnotu $x=100$, pro zadané číslo 103 je tedy $h=3$:

$$df(100)=f'(100)\cdot 3=(0,5/\sqrt{100})\cdot 3=0,05\cdot 3=0,15$$

$$f(100+3) \approx f(100)+df(100)=10+0,15=10,15$$