

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Chci určit pro $x \rightarrow b$ limitu podílu $f(x)/g(x)$.

Pokud pro $x \rightarrow b$ bud'

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad (\text{typ } 0/0)$$

nebo

$$\lim f(x) = \pm\infty, \lim g(x) = \pm\infty \quad (\text{typ } \infty/\infty),$$

pak pro $x \rightarrow b$ je

$$\lim [f(x)/g(x)] = \lim [f'(x) / g'(x)]$$

Poznámka 1: Nejde o „derivaci podílu“!

Poznámka 2: Má smysl jen když $\exists$ derivace

L'HOSPITAL - PŘÍKLAD

Příklad: Určete limitu $f(x)=x \cdot \ln x$ pro $x \rightarrow 0+$.

Po převodu na zlomek: $f(x)=\ln x/x^{-1}$

ověříme pro $x \rightarrow 0+$ zvlášť limitu čitatele a jmenovatele:

$$\lim \ln x = -\infty$$

$$\lim x^{-1} = \infty$$

takže lze použít L'Hospitalovo pravidlo (jde o typ ∞/∞): Pro $x \rightarrow 0+$ bude

$$\begin{aligned} \lim x \cdot \ln x &= \lim (\ln x)' / (x^{-1})' = \lim (x^{-1}) / (-x^{-2}) = \\ &= -\lim x = 0. \end{aligned}$$

MONOTONIE A 1. DERIVACE

Pokud pro $\forall x \in I$ je $f'(x) > 0$, f je na I rostoucí.

Je-li pro $\forall x \in I$ je $f'(x) < 0$, f je na I klesající.

Funkce $f(x)$ má v bodě b stacionární bod $\Leftrightarrow$
 $f'(b) = 0$.

V těchto bodech f ani neroste, ani neklesá.

ZAKŘIVENÍ A 2. DERIVACE

Pokud pro $\forall x \in I$ je $f^{(2)}(x) > 0$,
f je na I konvexní.

Je-li pro $\forall x \in I$ je $f^{(2)}(x) < 0$,
f je na I konkávní.

Funkce $f(x)$ má v bodě b inflexní bod $\Leftrightarrow$
 $f^{(2)}(b) = 0$.

URČENÍ EXTRÉMU

Pokud pro stacionární bod $f^{(2)}(b) > 0 \Rightarrow$
má f v bodě b lokální minimum.

Pokud pro stacionární bod $f^{(2)}(b) < 0 \Rightarrow$
má f v bodě b lokální maximum.

Poznámka 1: Lokální znamená alespoň na nějakém okolí daného bodu (jinak “globální”).

Poznámka 2: Uvedené implikace neplatí naopak, $\exists$ extrémů i jinde - např. v bodech bez derivace ($|x|$)

INTEGRÁLY

Necht' pro funkci $F(x)$ platí pro všechna x z dané množiny: $F'(x)=f(x)$.

Pak $F(x)$ je tzv. primitivní funkce k funkci $f(x)$.

Necht' je $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

Pak neurčitým integrálem funkce $f(x)$ jsou všechny funkce $F(x)+c$.

Značíme: $\int f(x) \, dx = F(x) + c.$

INTEGRÁLY - pravidla

Tvrzení: Neurčitý integrál - základní pravidla.

$$1) \quad f(x) = k \quad \int f(x) \, dx = kx + c$$

$$2) \quad f(x) = x^n \quad \int f(x) \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

(platí pro všechna reálná x a přirozená n ,
nebo pouze pro $x > 0$ při libovolném reálném $n \neq -1$)

$$3) \quad f(x) = x^{-1} \quad \int f(x) \, dx = \ln |x| + c \quad (x \neq 0)$$

$$4) \quad f(x) = \sin x \quad \int f(x) \, dx = -\cos x + c$$

$$5) \quad f(x) = \cos x \quad \int f(x) \, dx = \sin x + c$$

$$6) \quad f(x) = a^x \quad \int f(x) \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$7) \quad f(x) = (\cos x)^{-2} \quad \int f(x) \, dx = \operatorname{tg} x + c \quad (\text{pro } x \neq 0, 5\pi + k\pi, \, k \in \mathbf{Z})$$

$$8) \quad f(x) = (\sin x)^{-2} \quad \int f(x) \, dx = -\operatorname{cotg} x + c \quad (\text{pro } x \neq k\pi, \, k \in \mathbf{Z})$$

INTEGRÁLY - pravidla

Tvrzení: Pravidla pro integrování algebraických operací.

$$9) \int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$$

$$10) \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

Tvrzení: Metoda integrování per partes (po částech).

Nechť mají spojité funkce f a g na dané množině spojité derivace. Pak platí

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$