

INTEGRÁLY - metody

Tvrzení: Metoda integrování per partes (po částech).

Nechť mají spojité funkce f a g na dané množině spojité derivace. Pak platí

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx$$

Př: $\int x \cdot \cos x \, dx$

a) Nevhodný způsob označení:

$$f'(x) = x, \quad g(x) = \cos x$$

b) Vhodný způsob označení:

$$f'(x) = \cos x, \quad g(x) = x$$

INTEGRÁLY - metody

Tvrzení: Metoda integrování substitucí.

Nechť lze funkci f na dané množině vyjádřit ve tvaru

$$f(x) = g(h(x)) \cdot h'(x).$$

Pak na dané množině platí (pokud uvedené integrály existují)

$$\int f(x) \, dx = \int g(h(x)) \cdot h'(x) \, dx = \int g(z) \, dz.$$

Ve výsledku je nutno zpětně dosadit místo pomocné proměnné z původní vnitřní funkci $h(x)$.

Př:

$$\int 2x \cdot \cos(x^2) \, dx$$

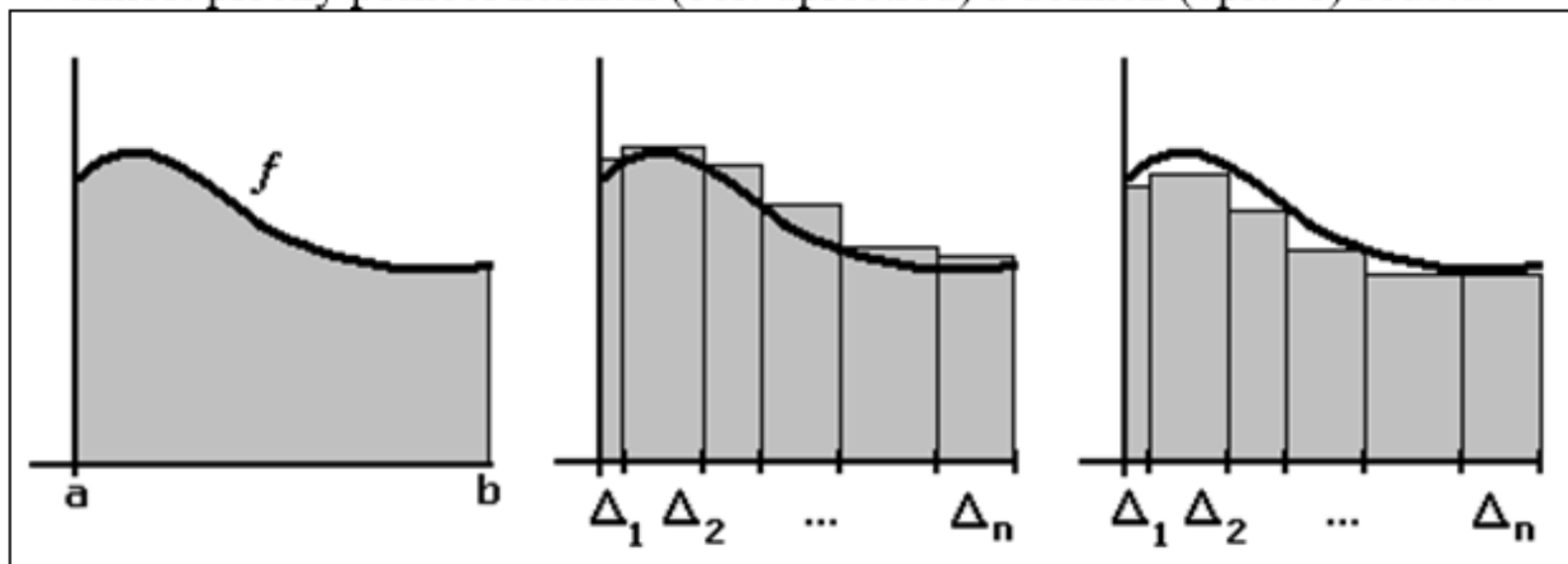
$$\text{označení } z = h(x) = x^2, \quad g(z) = \cos z$$

INTEGRÁL URČITÝ

Definice: Necht' je f spojitá funkce na intervalu $\langle a;b \rangle$. Rozdělme libovolně tento interval na n úseků s (obecně různými) délkami Δ_i ($i=1,\dots,n$). Na každém úseku určíme pro f její maximální hodnotu M_i a minimální hodnotu m_i . Vypočteme velikost tzv. **horního (dolního) součtu** jako

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i M_i, \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i m_i.$$

Velikost plochy pomocí horních (obr. uprostřed) a dolních (vpravo) součtů.



INTEGRÁL URČITÝ

Definice: Nechť je f spojitá funkce na intervalu $\langle a;b \rangle$. Rozdělme libovolně tento interval na n úseků s (obecně různými) délkami Δ_i ($i=1,\dots,n$). Na každém úseku určíme pro f její maximální hodnotu M_i a minimální hodnotu m_i . Vypočteme velikost tzv. **horního (dolního) součtu** jako

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i M_i, \quad \text{resp.} \quad \sum_{i=1}^n \Delta_i m_i.$$

Při jiné volbě rozdělení intervalu $\langle a;b \rangle$ na jednotlivé úseky dostáváme jiné hodnoty horního, resp. dolního součtu. Označme jako tzv. **horní integrál** $S(f,a,b)$ infimum ze všech možných takto získaných horních součtů a jako tzv. **dolní integrál** $s(f,a,b)$ supremum ze všech možných takto získaných dolních součtů. Pokud $S(f,a,b)=s(f,a,b)$, pak tuto hodnotu značíme

$$\int_a^b f(x) dx$$

a nazýváme ji **určitý integrál** funkce f na intervalu $\langle a;b \rangle$.

INTEGRÁL URČITÝ

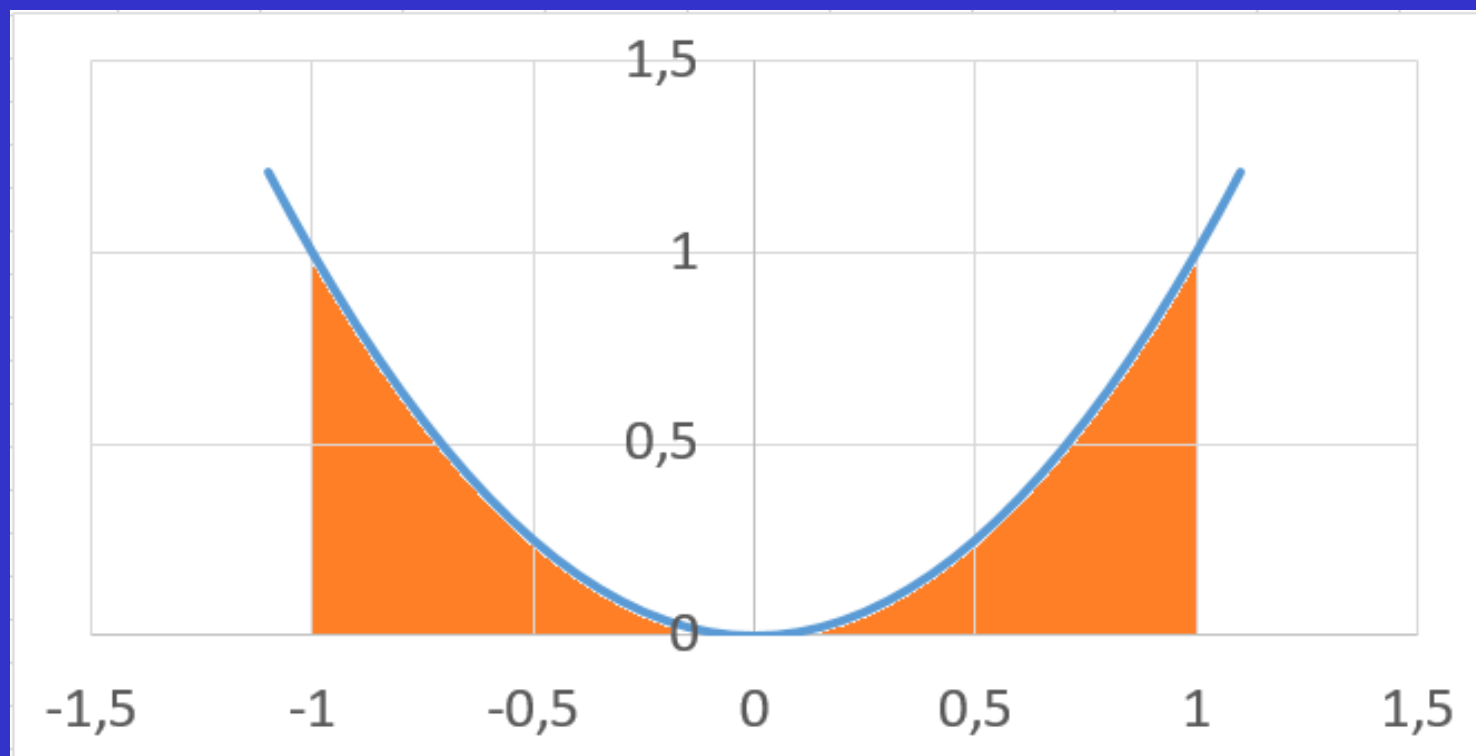
Tvrzení: Výpočet určitého integrálu pomocí primitivní funkce.

Nechť je f spojitá funkce na intervalu $\langle a;b \rangle$. Nechť F je funkce k ní na intervalu $\langle a;b \rangle$ primitivní. Pak

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Př: Hodnota určitého integrálu funkce x^2 na intervalu -1 až 1 ?

INTEGRÁL URČITÝ

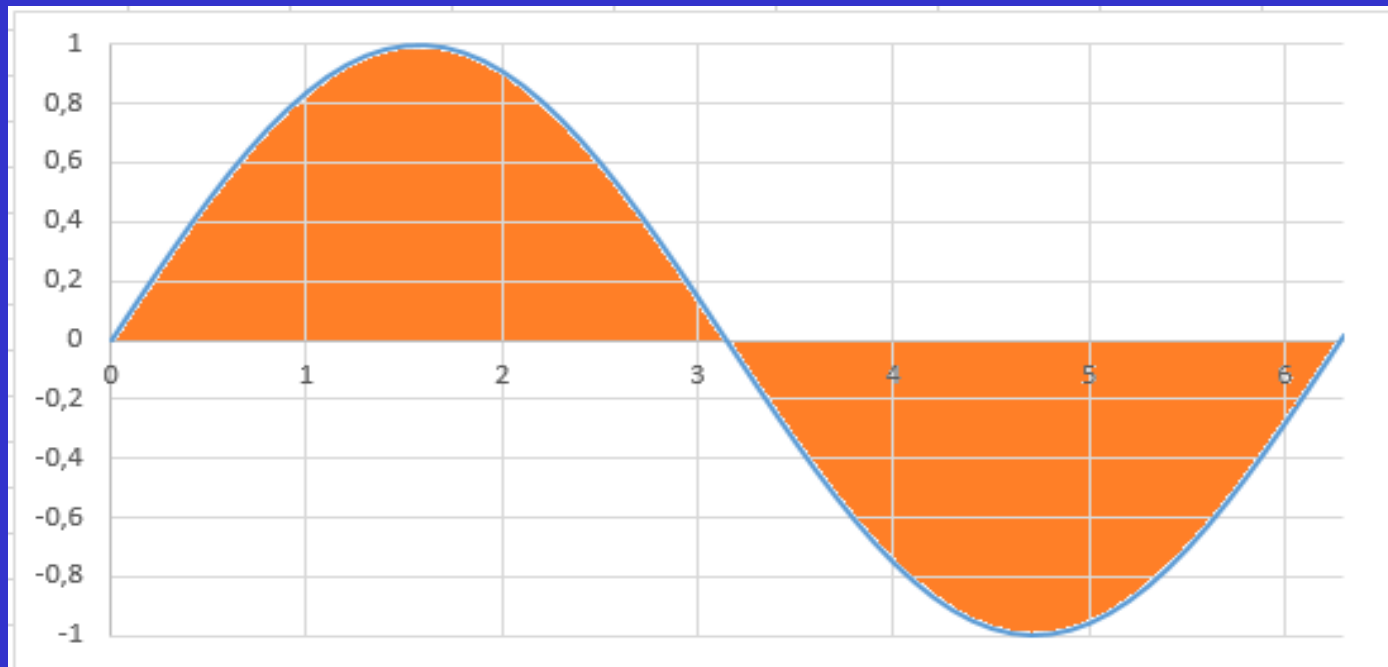


Př: Hodnota určitého integrálu funkce x^2 na intervalu -1 až 1?

$$F(x) = x^3/3, \text{ tj. } = (1^3)/3 - (-1^3)/3 = 2/3$$

INTEGRÁL URČITÝ

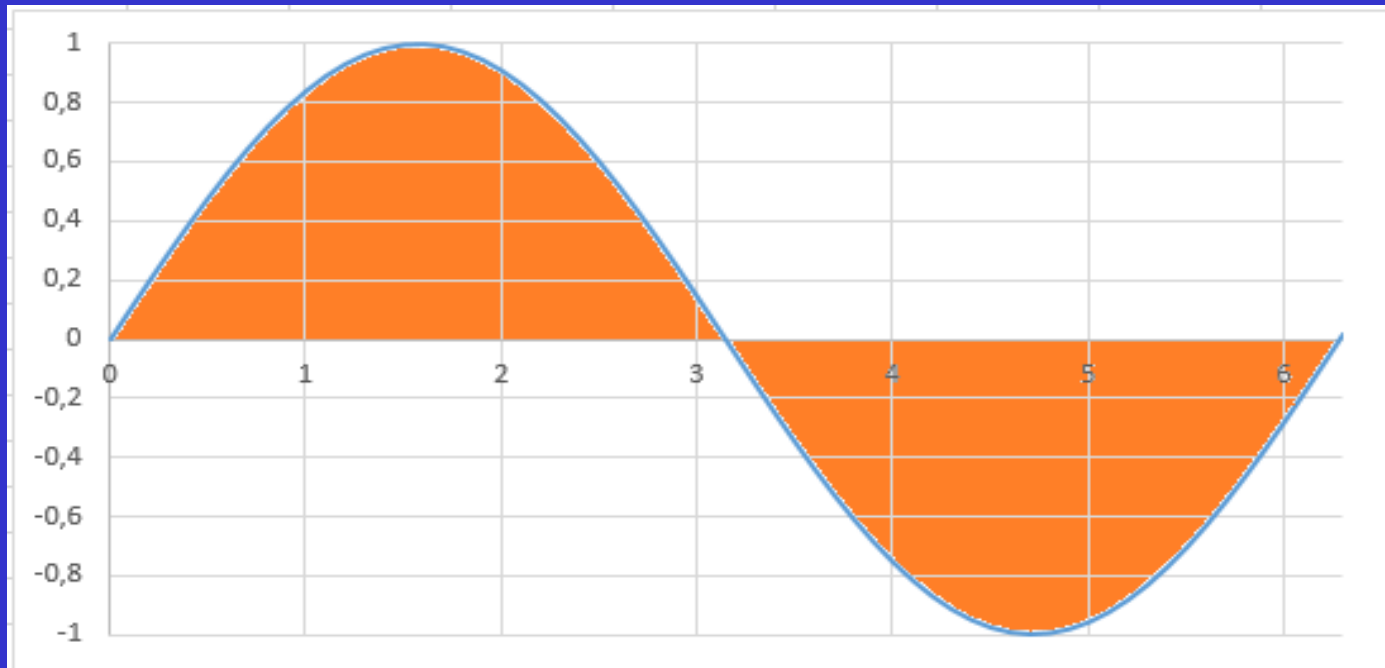
Př: Hodnota určitého integrálu funkce $\sin x$ na intervalu 0 až 2π ?



$$F(x) = -\cos x, \text{ tj. } = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -1 - (-1) = 0?$$

INTEGRÁL URČITÝ

= velikost orientované plochy



„běžná“ plocha = $2 \cdot \text{integrál s mezemi } 0 \text{ až } \pi$:
 $= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$, tj. = 4