

INTEGRÁL NEVLASTNÍ

= situace, kdy je aspoň jedna z mezí nevlastní

Př:

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = [e^x]_{-\infty}^0 =$$

$$= (e^0) - (\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x) = 1 - 0 = 1$$

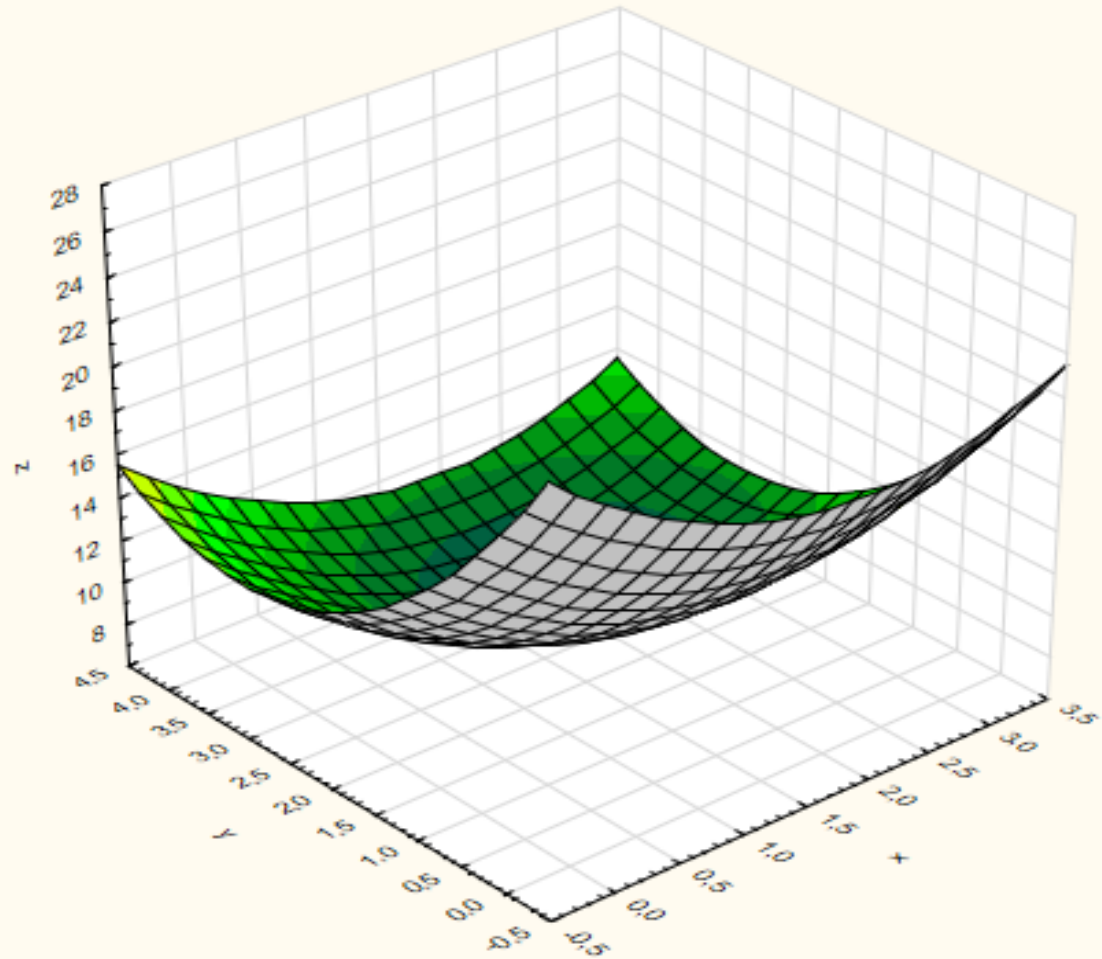
(Grafický význam?)

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Funkce $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nebo např. $z=f(x, y)$.

Př:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 20$$



FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

Funkce $y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, nebo např. $z=f(x, y)$.

Pojmy a vlastnosti funkcí 1 proměnné (okolí bodu, limita, spojitost,...) mají i zde analogii.

Parciální derivace podle kterékoli proměnné (vždy podle jedné) je definována tak, že při derivování pohlížím na ostatní proměnné jako na konstanty.

PARCIÁLNÍ DERIVACE

Příklad: Pro $f(x,y)=3xy^3+1$ určíme obě parciální derivace:

$$df/dx = f'_x(x,y) = 3y^3$$

$$df/dy = f'_y(x,y) = 3x \cdot 3y^2 = 9xy^2$$

Např. v bodě $A=[1,2]$ tedy platí:

$$f(A) = f(1,2) = 3 \cdot 1 \cdot 2^3 + 1 = 25$$

$$f'_x(A) = f'_x(1,2) = 3 \cdot 2^3 = 24$$

$$f'_y(A) = f'_y(1,2) = 9 \cdot 1 \cdot 2^2 = 36$$

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Pro funkci dvou proměnných je totální diferenciál (df) v bodě $A=[x_A, y_A]$ definován:

$$df_A(x, y) = f'_x(A) \cdot (x - x_A) + f'_y(A) \cdot (y - y_A)$$

Příklad (pokračování): Pro $f(x, y) = 3xy^3 + 1$ již známe hodnoty parciálních derivací v bodě $A=[1, 2]$: $f'_x(A) = 24$, $f'_y(A) = 36$. Určíme df_A :
 $df_A(x, y) = 24(x - 1) + 36(y - 2) = 24x + 36y - 96$,
např. $df_A(A) = 24 \cdot 1 + 36 \cdot 2 - 96 = 0$.

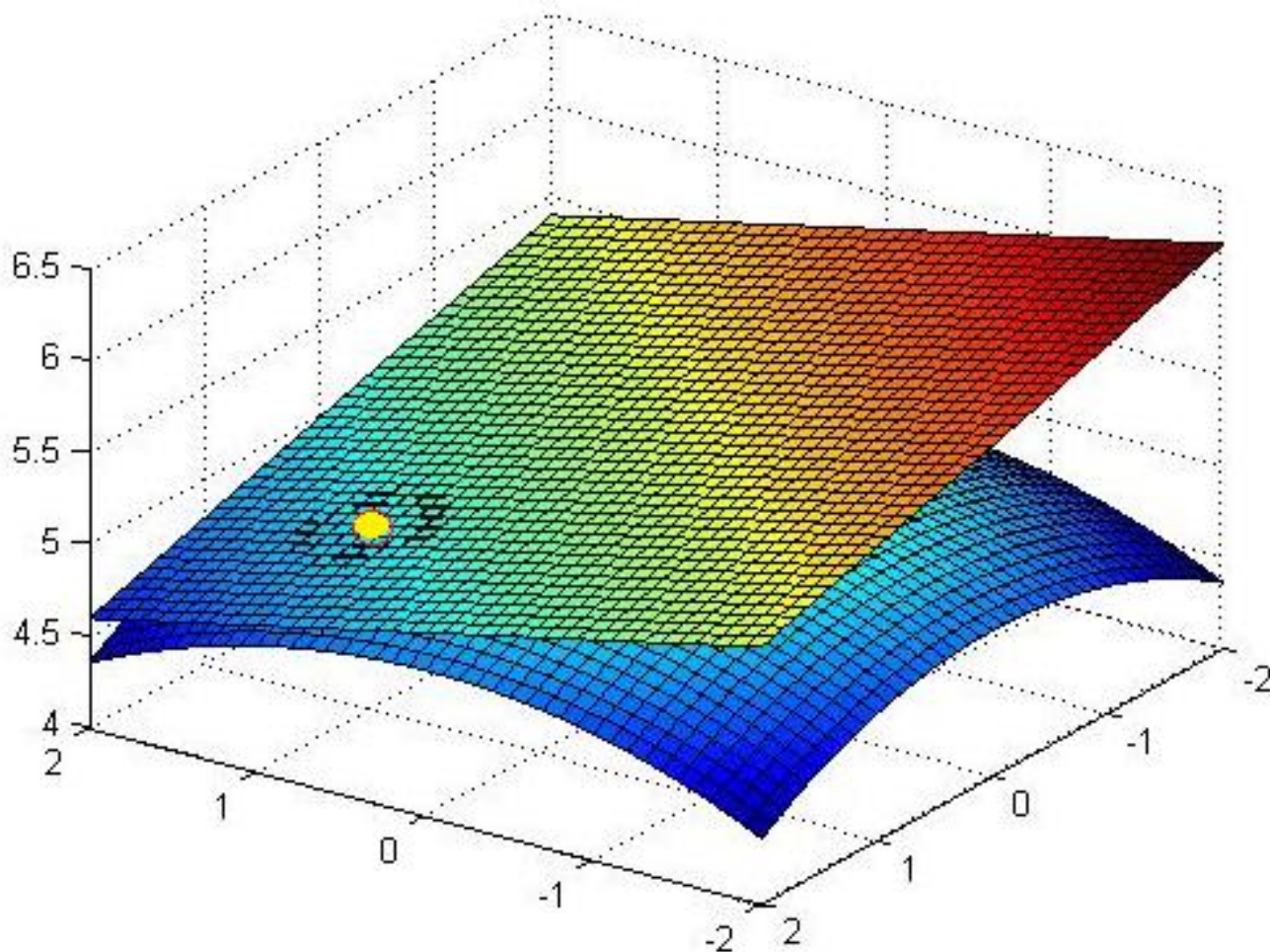
TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL

Poznámka:

Značení vystihuje fakt, že totální diferenciál je sice určen v daném bodě A , ale jde vždy opět o funkci původních (zde dvou) proměnných, které můžeme do $df_A(x,y)$ libovolně dosazovat.

Pokud dosadíme přímo souřadnice bodu A ($x=x_A, y=y_A$), vyjde $df_A(A)=0$.

TOTÁLNÍ DIFERENCIÁL



URČENÍ EXTRÉMU

Pro $f(x,y)$ je stacionární ten bod A , v němž existují obě parciální derivace a jsou rovny 0.

Derivujeme-li znovu parciální derivaci (podle kterékoli proměnné), vznikne 2.parc.derivace:

$$f_{xx}^{(2)}, \quad f_{yy}^{(2)}, \quad f_{xy}^{(2)} = f_{yx}^{(2)}$$

Označme jako $D_1(x,y)$ hodnotu $f_{xx}^{(2)}(x,y)$ a jako $D_2(x,y)$ hodnotu Hessiánu = det matice

$$\begin{vmatrix} f_{xx}^{(2)}(x,y) & f_{xy}^{(2)}(x,y) \\ f_{yx}^{(2)}(x,y) & f_{yy}^{(2)}(x,y) \end{vmatrix}$$

URČENÍ EXTRÉMU

Pro stacionární bod A platí:

a) Je-li $D_2(A) < 0$, není v A lok.extrém

b) Je-li $D_1(A) > 0$, $D_2(A) > 0$, A je lok.minimum

c) Je-li $D_1(A) < 0$, $D_2(A) > 0$, A je lok.maximum

SEDLOVÝ BOD

Zbývající možnost pro stacionární bod A:

Je-li $D_2(A) < 0$, je v A sedlový bod

