

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Aritmetická posloupnost (AP)

- rekurentně: $a_1, a_{n+1}=a_n+d$ ($d \neq 0 \dots$ difference)

- obecně: $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $a_n = a_m + (n-m)d$

- n-tý částečný součet

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

Aritmetická řada

$$s = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Geometrická posloupnost (GP)

- rekurentně: $a_1, a_{n+1}=a_n q$ ($q \neq 0 \dots$ kvocient)

- obecně: $a_n = a_1 q^{n-1} = a_m q^{n-m}$

- n-tý částečný součet ($q \neq 1$)

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Geometrická řada

$$s = (\text{analog.}) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_1}{1-q} \dots |q| < 1$$
$$= \pm \infty \dots q \geq 1$$

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Geometrická posloupnost - poznámky

a) Př: Přepis periodického čísla?

b) Vztah mezi GP a AP?

$$a_n \approx AP \rightarrow b^{a_n} \approx GP \quad \text{pro } b > 0, b \neq 1$$

$$a_n \approx GP \rightarrow \log_b(a_n) \approx AP \quad \text{pro } b > 0, b \neq 1$$

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Mocninná řada (se středem c)

$$f(x) = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$$

spec. Mocninná řada (se středem $c=0$)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

Př: $f(x) = x^2 + 6x$

- a) Střed $c=0$... $a_2=1$, $a_1=6$, ostatní $a_n=0$
- b) Střed $c=2$... $a_2=1$, $a_1=10$, $a_0=16$, ost. $a_n=0$

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Mocninná vs. geometrická řada?

$$c=0, a_n=1 \rightarrow$$

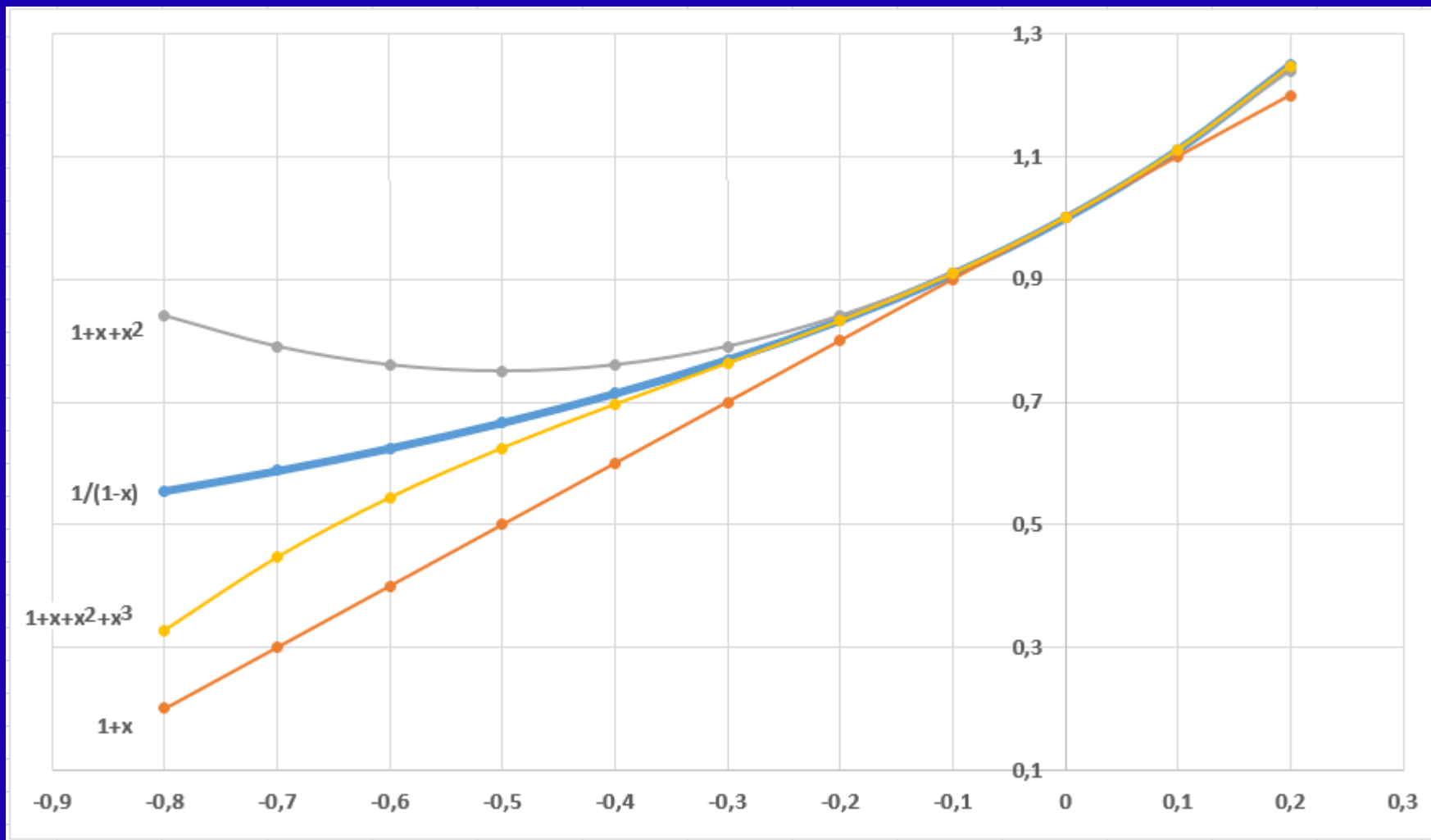
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n =$$

$$= 1 + x + x^2 + \dots$$

Jde tedy o součet v GP, $a_1=1$, $q=x$:

$$s = a_1/(1-q) \quad \dots \text{ pro } |q|<1 \quad \rightarrow$$

$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x) \quad \text{pro } |x|<1$$



$$f(x) = 1 + x + x^2 + \dots = 1/(1-x) \quad \text{pro } |x| < 1$$

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Speciální mocninná řada – Taylorova řada

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \rightarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n =$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x - c) + \frac{f''(c)}{2!} (x - c)^2 + \dots$$

Př: exponenciální funkce při $c=0$ (tj. „poblíž 0“)?

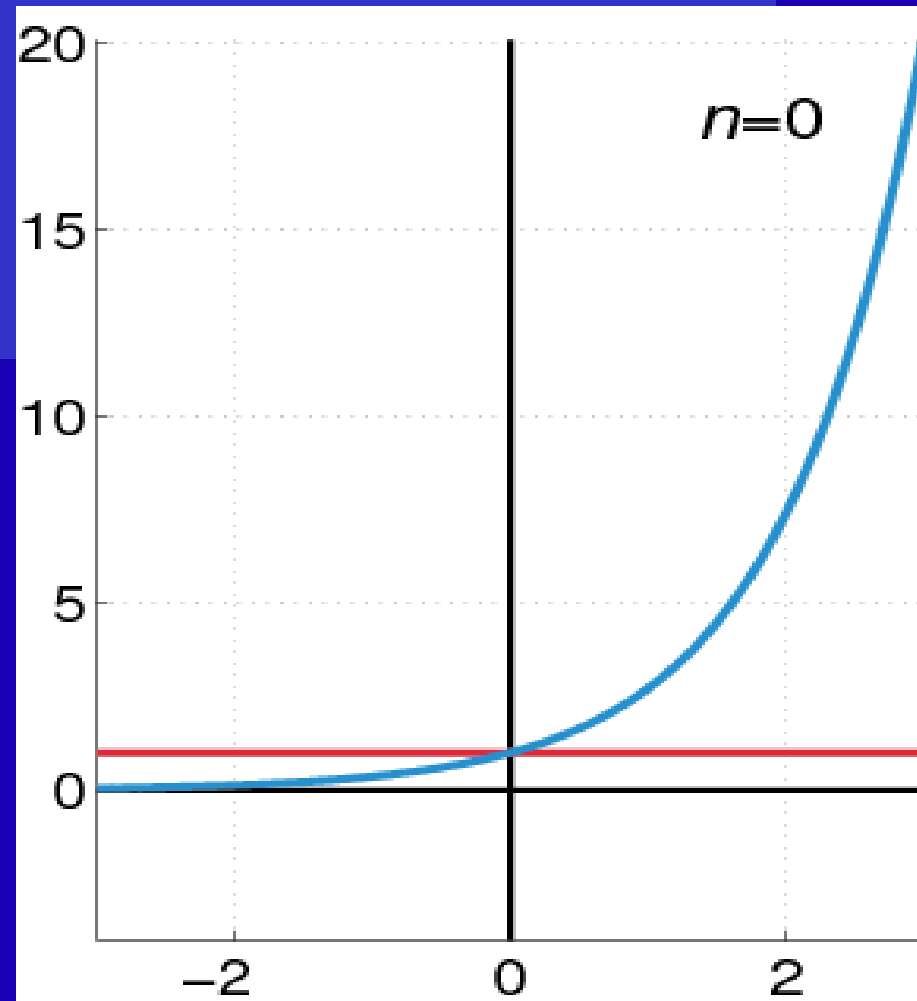
$$f(x) = e^x = f^{(n)}(x) \rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} = \frac{e^c}{n!} = \frac{1}{n!} \rightarrow$$

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

POSLOUPNOSTI a ŘADY

Ilustrace – Taylorův „rozvoj“ (tj. část řady až do „stupně n “) pro expon. funkci „poblíž nuly“

(Poznámka: při $c=0$ též tzv. Mclaurinova řada, resp. rozvoj)



https://cs.wikipedia.org/wiki/Mocninná_řada