

# Jednostranné intervaly spolehlivosti

⇔ hledáme jen jednu z obou mezí

Princip:

dle zadání úlohy hledáme jen dolní či jen horní mez podle „oboustranného“ vzorce s tou změnou, že výraz  $1-\alpha/2$  ve vzorci nahradíme výrazem  $1-\alpha$ .

# Testování hypotéz

Otestujte / ověřte / prokažte...

že střední věk (tj.  $\mu$ )

...činí 40 let ( $=40$ )

...je alespoň 40 let ( $>40$ )

# Testování hypotéz

Otestujte / ověřte / prokažte...

zda hmotnost vejce

...závisí na jeho délce

...je různá dle typu snůšky

# Testování hypotéz

Nulová hypotéza  $H_0$ :

pevně daná forma (nerozhoduje slovní formulace problému!); u parametrických testů obsahuje  $H_0$  rovnost,

v jiných speciálních případech obsahuje  $H_0$  např. tvrzení o nezávislosti

Alternativní hypotéza  $H_1$ :

doplňk k  $H_0$

# Testování hypotéz

Postup rozhodování při použití statistického SW (i např. Excel) – nelze „ručně“:

- a) Z dat spočte počítač **p-hodnotu**  
(je vždy mezi 0-1)
- b) Porovnáme p-hodnotu s předem zvolenou  $\alpha$  :
- c) Pokud je  $p \leq \alpha$ , zamítáme při daném  $\alpha$  nulovou hypotézu ve prospěch hypotézy alternativní
- d) Pokud naopak je  $p > \alpha$ , nelze při daném  $\alpha$  zamítnout nulovou hypotézu ve prospěch hypotézy alternativní

# Testování hypotéz

Jaký význam má ono volené  $\alpha$ ?

Možnosti při testování:	Doopravdy platí $H_0$	Doopravdy platí $H_1$
Dle dat vyberu $H_0$	OK	„chyba 2. druhu“
Dle dat zamítnu $H_0$	„chyba 1. druhu“	OK

$\alpha = P(\text{chyby 1. druhu}) \dots$  „hladina významnosti“

# Jednovýběrový t-test

■ Pro střední hodnotu  $\mu$  :

$$\text{a) } H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu \neq \mu_0$$

(oboustranná alternativa)

$$\text{b) } H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$$

$$\text{c) } H_0: \mu = \mu_0 \quad H_1: \mu < \mu_0$$

(jednostranné alternativy)

Vždy  $\mu_0$  je konkrétní testovaná hodnota.

# Jednovýběrový t-test

Příklad:

Dle věku osmi náhodně vybraných čtenářů dětského časopisu ověřte pravdivost tvrzení, že střední věk čtenářů tohoto časopisu je 14 let.

Věky popořadě (*viz interval spolehlivosti*):

12, 14, 15, 12, 15, 14, 12, 15.

$$H_0: \mu=14 \quad H_1: \mu \neq 14$$



	A	B	C
1		věk	$\mu_0$
2	1	12	14
3	2	14	14
4	3	15	14
5	4	12	14
6	5	15	14
7	6	14	14
8	7	12	14
9	8	15	14
10			
11	=ttest(B2:B9;C2:C9;2;1)		

Výsledek =  
p-hodnota

```
> vek=c(12,14,15,12,15,14,12,15)
> t.test(vek,mu=14)
```

One Sample t-test

```
data: vek
t = -0.75337, df = 7, p-value = 0.4758
alternative hypothesis: true mean is not equal to 14
95 percent confidence interval:
 12.44798 14.80202
sample estimates:
mean of x
 13.625
```

# Jednovýběrový t-test

Příklad (výsledek):

$p=0,48$  ( $>0,05$ )  $\Rightarrow$  nelze zamítnout  $H_0$

Příklad (odpověď):

Na 5% hladině významnosti  
nelze na základě dat zamítnout tvrzení,  
že střední věk čtenářů činí 14 let.

Příklad (k zamyšlení):

Je nějaký vztah mezi tímto výsledkem a intervalem spolehlivosti  $[12,448; 14,802]$ ?

# Párový t-test

*Sledujeme spojitou číselnou veličinu (např.):*

- Hmotnost zvířete před uložením do zimního spánku a po probuzení;
- Změření výšky stromu dvěma metodami (standardní a novou, experimentální); ...

*Chceme prokázat:*

- Způsobuje zimní spánek významné snížení hmotnosti?
- Jsou výškové údaje zjištěné novou, experimentální metodou, srovnatelné s údaji zjištěnými osvědčenou standardní metodou?

# Párový t-test

Data jsou ve tvaru párů, tj. uspořádaných dvojic (též tzv. závislé výběry – dependent samples):

$(y_1; z_1), \dots, (y_n; z_n)$ , kde např.

- $y_i$  = hmotnost před zimním spánkem (i-té zvíře),  
 $z_i$  = hmotnost po probuzení (i-té zvíře)  
 $i=1, \dots, n$        $n$ =počet zvířat ( $2n$ =počet údajů)
- $y_i$  = výška i-tého stromu zjištěná standardně,  
 $z_i$  = výška i-tého stromu zjištěná novou metodou  
 $i=1, \dots, n$        $n$ =počet stromů ( $2n$ =počet údajů)

# Párový t-test

**Řešení:**

- **Představíme-li si rozdíly** (*není je ale ani nutno skutečně počítat*)

$$x_i = y_i - z_i \quad (i=1, \dots, n)$$

- **vznikla by „rozdílová“ veličina X**, jejíž střední hodnotu označíme  $\mu$

# Párový t-test

**Řešení:**

- pro „rozdílovou“ veličinu  $X$  provedeme parametrický test s nulovou hypotézou  $H_0: \mu=0$  (mezi hodnotami v párech není významný rozdíl)  
a s alternativou  $H_1: \mu \neq 0$  (mezi hodnotami v párech je významný rozdíl),  
příp. (často) s alternativou jednostrannou (viz příklad se zimním spánkem)

# Párový t-test

Příklad:

Posud'te na základě uvedených dat, zda obě metody určují v průměru výšku objektů srovnatelně. Osm objektů měřeno, každý oběma metodami:

<b>Výška standardní metodou (m)</b>	<b>1,2</b>	<b>2,4</b>	<b>1,6</b>	<b>1,8</b>	<b>3,2</b>	<b>2,7</b>	<b>2,0</b>	<b>1,9</b>
<b>Výška experimentálně ověřovanou novou metodou (m)</b>	<b>1,3</b>	<b>2,4</b>	<b>1,8</b>	<b>1,7</b>	<b>3,3</b>	<b>3,1</b>	<b>1,8</b>	<b>2,2</b>



# Párový t-test

Počítačové řešení (Excelem):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	standard	1,2	2,4	1,6	1,8	3,2	2,7	2,0	1,9
2	experim.	1,3	2,4	1,8	1,7	3,3	3,1	1,8	2,2
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									

**Analýza dat**

Analytické nástroje:

- Exponenciální vyrovnnání
- Dvouvýběrový F-test pro rozptyl
- Fourierova analýza
- Histogram
- Klouzavý průměr
- Generátor pseudonáhodných čísel
- Pořadová statistika a percentily
- Regrese
- Vzorkování
- Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu**

OK

Storno

Nápověda

# Párový t-test

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	standard	1,2	2,4	1,6	1,8	3,2	2,7	2,0	1,9
2	experim.	1,3	2,4	1,8	1,7	3,3	3,1	1,8	2,2
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									
11									
12									
13									
14									
15									
16									
17									
18									

**Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu**

Vstup

1. soubor:

2. soubor:

Hypotetický rozdíl středních hodnot:

☐ Popisky

Alfa:

Možnosti výstupu

☐ Výstupní oblast:

☒ Nový list:

☐ Nový sešit

OK

Storno

Nápověda

# Párový t-test

	A	B	C	D	E	F
1	<b>Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu</b>					
2						
3		<i>Soubor 1</i>	<i>Soubor 2</i>			
4	Stř. hodnota	2,1	2,2			
5	Rozptyl	0,4086	0,4914			
6	Pozorování	8	8			
7	Pears. korelace	0,9596				
8	Hyp. rozdíl stř. hodnot	0				
9	Rozdíl	7				
10	t stat	-1,4142				
11	P(T<=t) (1)	0,1001				
12	t krit (1)	1,8946				
13	<b>P(T&lt;=t) (2)</b>	<b>0,2002</b>				
14	t krit (2)	2,3646				

**p-hodnota**

$p > \alpha$  ( $0,2002 > 0,05$ )  $\Rightarrow$  nelze zamítnout  $H_0$

# Párový t-test

Excel „rychle“: =TTEST(B1:I1;B2:I2;2;1)

R:

```
> stand=c(1.2,2.4,1.6,1.8,3.2,2.7,2.0,1.9)
> experim=c(1.3,2.4,1.8,1.7,3.3,3.1,1.8,2.2)
> t.test(stand,experim,paired=T)

      Paired t-test

data:  stand and experim
t = -1.4142, df = 7, p-value = 0.2002
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.26720418  0.06720418
sample estimates:
mean of the differences
                -0.1
```

Pro zkoumanou veličinu by ale měla platit  
NORMALITA; ne-li, co dělat?

# Párový Wilcoxonův test

neparametrická verze párového testu;  
netestujeme chování parametru  $\mu$

testujeme shodu ( $H_0$ ), resp. rozdílnost ( $H_1$ ) polohy obou závislých výběrů:

```
> stand=c(1.2,2.4,1.6,1.8,3.2,2.7,2.0,1.9)
> experim=c(1.3,2.4,1.8,1.7,3.3,3.1,1.8,2.2)
> wilcox.test(stand,experim,paired=T)
```

```
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
```

```
data: stand and experim
```

```
V = 7, p-value = 0.2702
```

```
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Rozhodnutí:  $p=0,2702 > 0,05 \rightarrow$

Nelze zamítnout  $H_0$ . *aneb:*

Data neprokázala významnou odlišnost mezi oběma metodami. *aneb:*

Nová metoda měří srovnatelně s tou standardní.

```
> stand=c(1.2,2.4,1.6,1.8,3.2,2.7,2.0,1.9)
> experim=c(1.3,2.4,1.8,1.7,3.3,3.1,1.8,2.2)
> wilcox.test(stand,experim,paired=T)
```

```
Wilcoxon signed rank test with continuity correction
```

```
data: stand and experim
```

```
V = 7, p-value = 0.2702
```

```
alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

# Dvouvýběrové testy

***Sledujeme (spojité) číselné veličiny, např.:***

- **výšku ve skupině mužů a ve skupině žen;**
- **hmotnost vajec ptačích druhů A a B;**

***Chceme prokázat:***

- **Je/není výška mužů a žen srovnatelná?**
- **Je/není mezi oběma ptačími druhy výrazný rozdíl ve hmotnosti vajec?**

# Dvouvýběrové parametrické testy

## ***Předpoklady:***

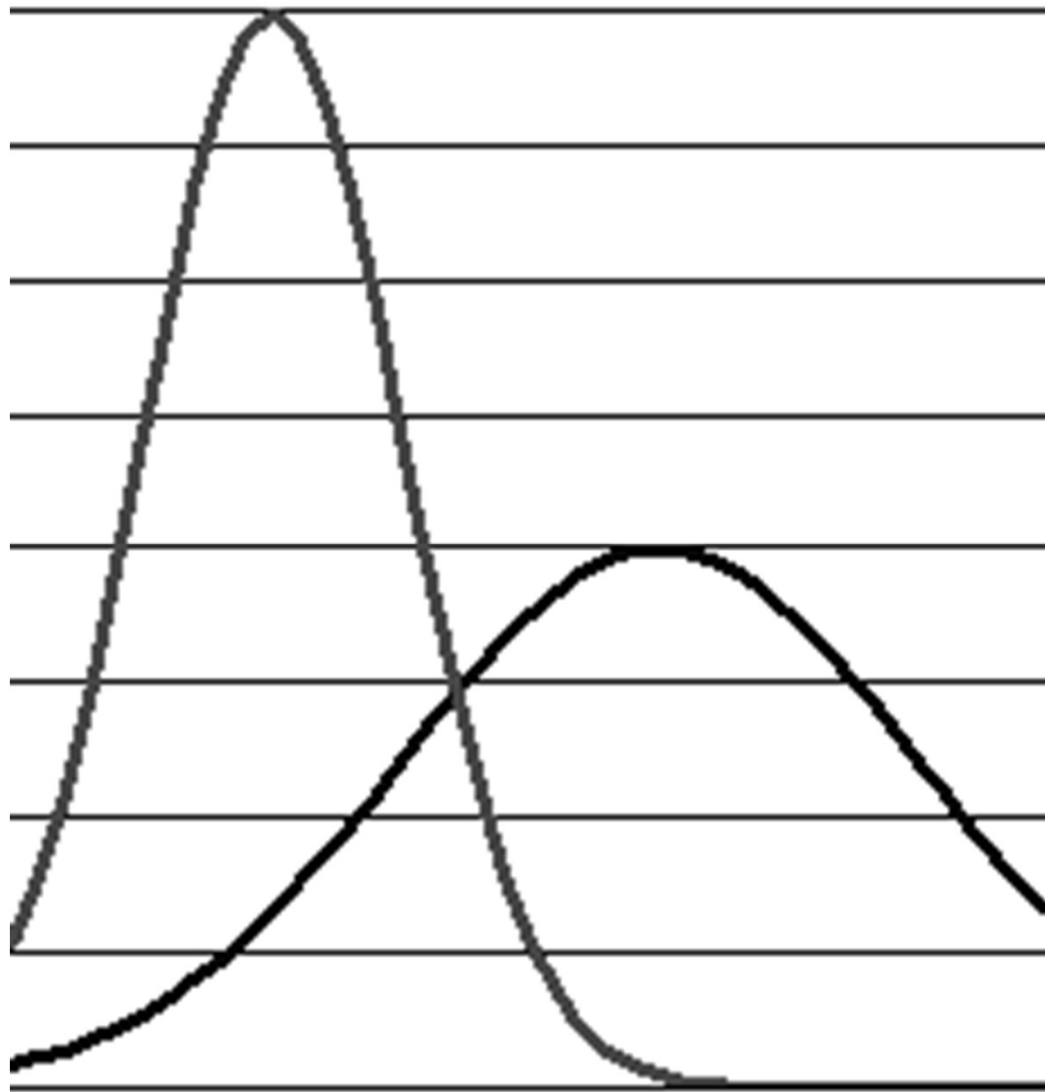
- **obě skupiny jsou nezávislé** (*např. u mužů a žen nejde o manželské páry*)
- **sledovaná veličina se v obou srovnávaných skupinách chová jako veličina normálně rozdělená**



# Dvouvýběrové parametrické testy

***Možnosti:***

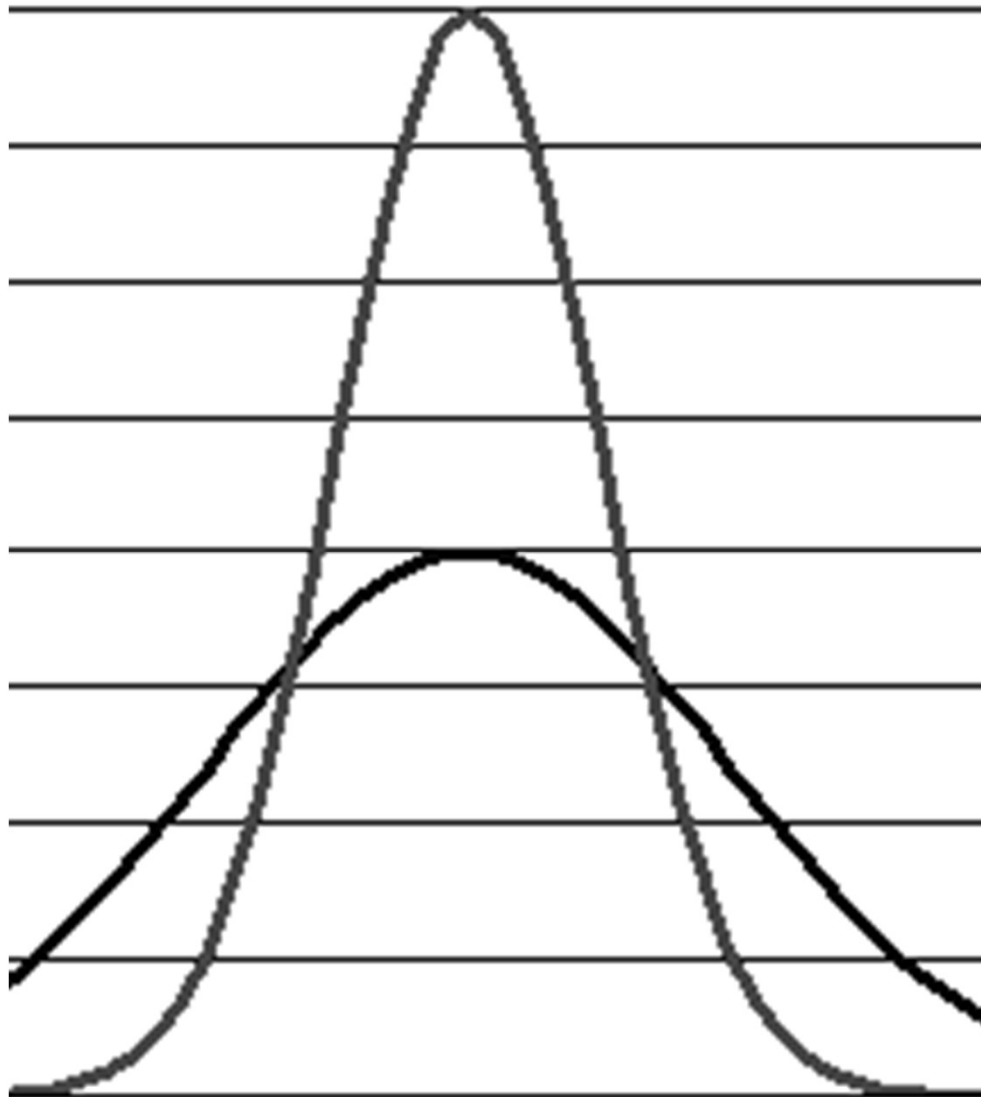
**a) v obou  
skupinách  
odlišné  
 $\mu$  i  $\sigma^2$**



# Dvouvýběrové parametrické testy

***Možnosti:***

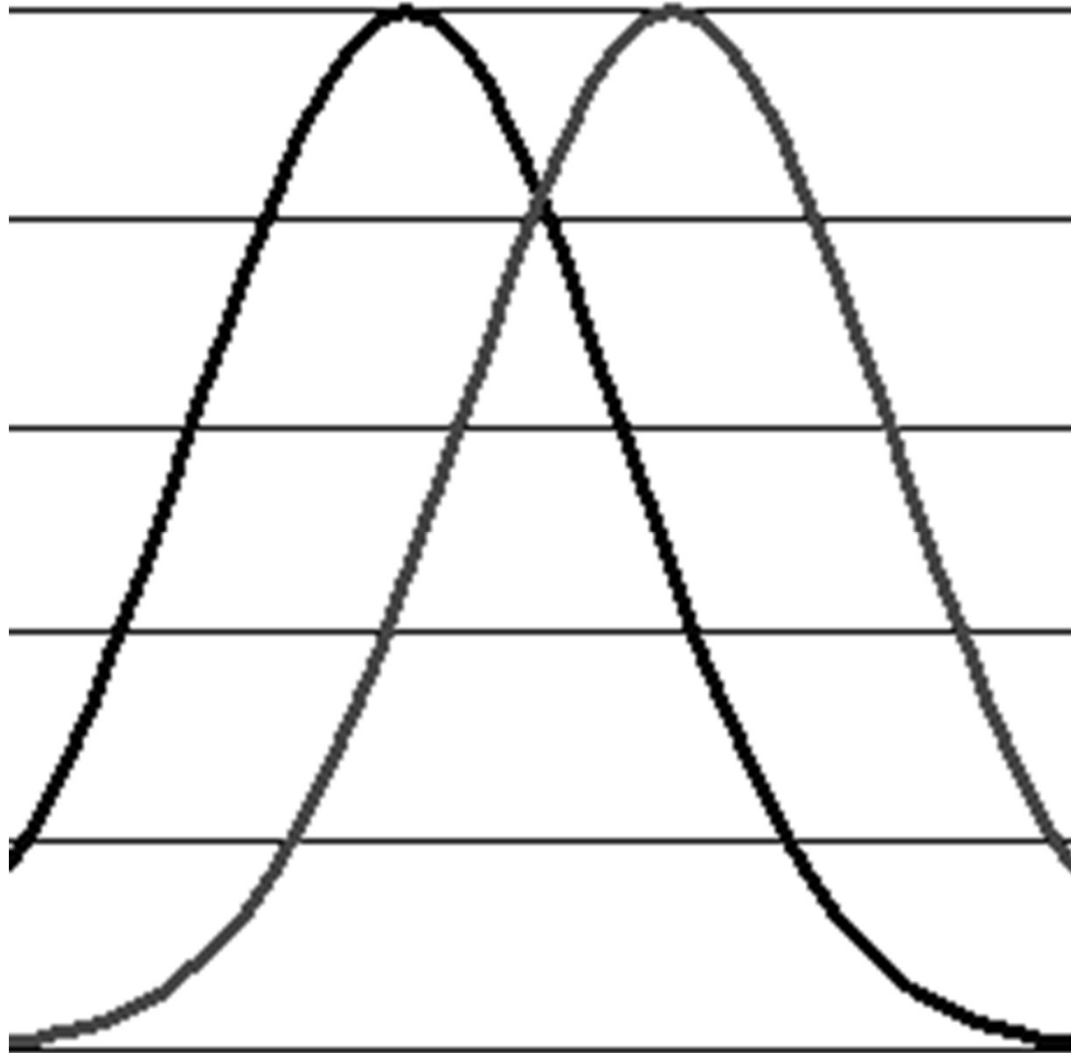
**b) v obou  
skupinách  
shodné  $\mu$ ,  
 $\sigma^2$  odlišné**



# Dvouvýběrové parametrické testy

***Možnosti:***

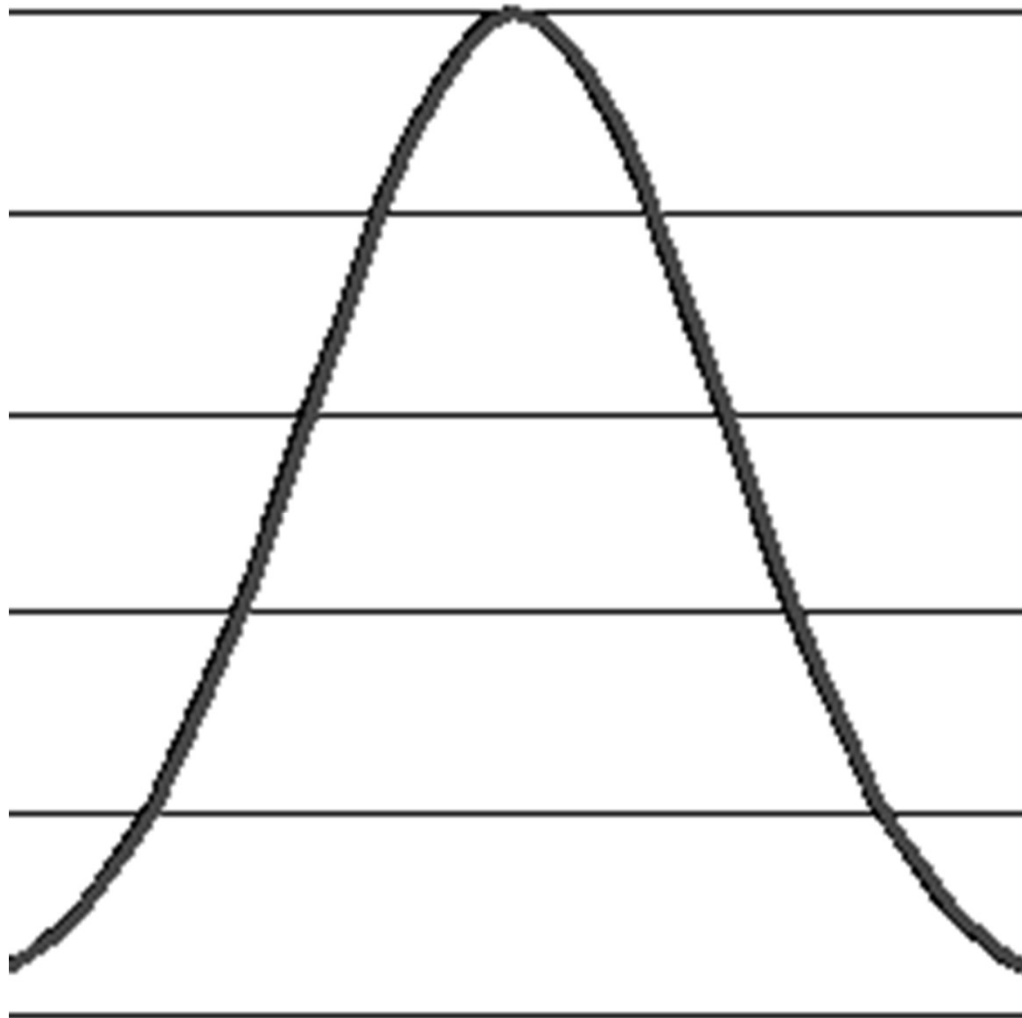
**c) v obou  
skupinách  
odlišné  $\mu$ ,  
 $\sigma^2$  shodné**



# Dvouvýběrové parametrické testy

***Možnosti:***

**d) v obou  
skupinách  
shodné  
 $\mu$  i  $\sigma^2$**



# Dvouvýběrové parametrické testy

***Testujeme tedy (popořadě):***

- 1. Je v obou skupinách srovnatelná či naopak výrazně odlišná variabilita?**

**ANEK:**

$$H_0: \sigma_a^2 = \sigma_b^2 \quad \text{versus} \quad H_1: \sigma_a^2 \neq \sigma_b^2$$

**Jde o tzv. F-test homogeneity rozptylů.**

# Dvouvýběrové parametrické testy

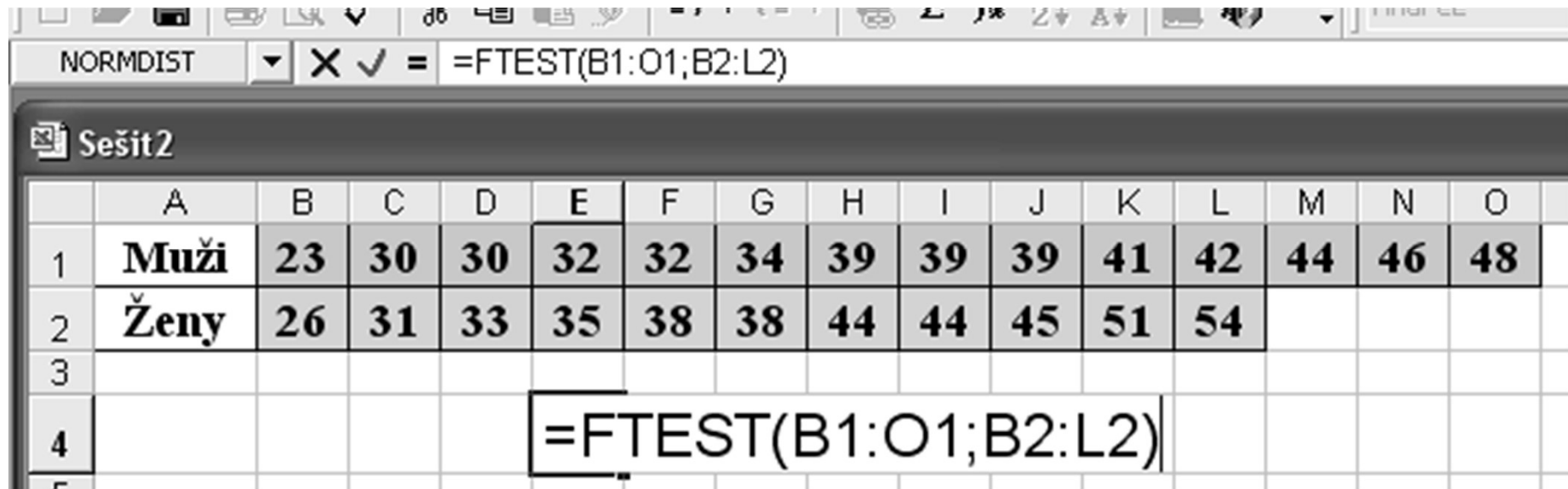
***Příklad: Zjistěte, zda ve sledované populaci závisí chování veličiny věk na pohlaví.***

***Jde o příklad testu (ne)závislosti spojité veličiny na veličině alternativní.***

***Jinak řečeno, porovnáváme chování veličiny věk u mužů a u žen... Je to tedy opravdu 2-výběrový test.***

***Nejprve zjistíme, zda je v obou skupinách srovnatelná variabilita:***

# Dvouvýběrové parametrické testy



The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	<b>Muži</b>	23	30	30	32	32	34	39	39	39	41	42	44	46	48
2	<b>Ženy</b>	26	31	33	35	38	38	44	44	45	51	54			
3															
4															

The formula bar shows the formula: `=FTEST(B1:O1;B2:L2)`. The spreadsheet is titled "Sešit2".

Výsledkem je p-hodnota (zde =0,522); protože  $p > 0,05$ , nelze zamítnout  $H_0$ . Znamená to, že variabilita obou skupin je srovnatelná.

# Dvouvýběrové parametrické testy

***Následně testujeme:***

**2. Jsou v obou skupinách srovnatelné či naopak výrazně odlišné střední hodnoty?**

**ANEK:**

$$H_0: \mu_a = \mu_b \quad \text{versus} \quad H_1: \mu_a \neq \mu_b$$

**Jde o tzv. 2-výběrový t-test. Na F-test navazuje proto, že existuje ve dvou variantách: při různých a při shodných rozptylech.**



# Dvouvýběrové parametrické testy

***Příklad - pokračování: Už víme, že veličina věk má ve sledované populaci srovnatelný rozptyl u mužů a u žen. Ted' ověříme, zda je i střední hodnota (střední věk) u obou pohlaví srovnatelná, nebo zda se výrazně liší u mužů a u žen.***

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	<b>Muži</b>	23	30	30	32	32	34	39	39	39	41	42	44	46	48
2	<b>Ženy</b>	26	31	32	35	38	38	44	44	45	51	54			
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															

příp.  
použít  
toto

**Analýza dat**

Analytické nástroje:

- Histogram
- Klouzavý průměr
- Generátor pseudonáhodných čísel
- Pořadová statistika a percentily
- Regrese
- Vzorkování
- Dvouvýběrový párový t-test na střední hodnotu
- Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů**
- Dvouvýběrový t-test s nerovností rozptylů
- Dvouvýběrový z-test na střední hodnotu

OK  
Storno  
Nápověda

# Dvouvýběrové parametrické testy

Dvouvýběrový t-test s rovností rozptylů		
	Soubor 1	Soubor 2
Stř. hodnota	37,071	39,909
Rozptyl	50,533	73,291
Pozorování	14	11
Společný rozptyl	60,428	
Hyp. rozdíl stř. hodn	0	
Rozdíl	23	
t stat	-0,906	
P(T<=t) (1)	0,187	
t krit (1)	1,714	
<b>P(T&lt;=t) (2)</b>	<b>0,374</b>	
t krit (2)	2,069	

**p-hodnota = 0,374**

**$p > 0,05 \Rightarrow$  nelze zamítnout  $H_0$**

**Nejen rozptyl věku, ale také střední věk mužů a žen je srovnatelný.**

**Jinak řečeno (celkově) – ve sledované populaci nebyla zjištěna závislost věku na pohlaví (situaci odpovídají Gaussovy křivky dle d)).**

# Dvouvýběrové parametrické testy

Excel „rychleji“ (příkaz určující jen p-hodnotu):

=TTEST(data1;data2;1;2) ... jednostranně, shodné rozptyly

=TTEST(data1;data2;2;2) ... oboustranně, shodné rozptyly

=TTEST(data1;data2;1;3) ... jednostranně, různé rozptyly

=TTEST(data1;data2;2;3) ... oboustranně, různé rozptyly

R:

(verze  
obecná,  
při  
neshodě  
rozptylů)

```
> muzi=c(23,30,30,32,32,34,39,39,39,41,42,44,46,48)
> zeny=c(26,31,33,35,38,38,44,44,45,51,54)
> t.test(muzi,zeny)

Welch Two Sample t-test

data: muzi and zeny
t = -0.88537, df = 19.392, p-value = 0.3868
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -9.536735  3.861411
sample estimates:
mean of x mean of y
 37.07143  39.90909
```